УДК 518:517.944

Н. Ю. Агафонова

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В СОСТАВНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ

В [1] было получено интегральное представление решения уравнения Лапласа в составных трехмерных областях. Найдем аналогичное представление для уравнения Пуассона.

В прямоугольной системе координат x, y, z рассмотрим в общем случае многосвязную область Q, которая состоит из M подобластей $Q_1, Q_2, ..., Q_M$, ограниченных соответственно подобластями $E_1, E_2, ..., E_M$. В каждой из подобластей задано уравнение Пуассона

$$\Delta T_i = \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} = \frac{g_i(x, y, z)}{\lambda_i}, \qquad i = \overline{1, M}, \tag{1}$$

где λ_i – известные постоянные, а $g_i(x,y,z)$ – известные функции.

Область, внешнюю к Q, обозначим через Q_0. Границу между подобластями Q_i и Q_j обозначим через E_{ij}; индексы i, j могут принимать значения $0,1,2,...,M$. Под M_i будем подразумевать множество тех значений j, которые обозначают номера Q_j, граничащих с Q_i.

Согласно [2, 3] для решения уравнения (1) в подобласти Q_i имеет место следующее интегральное представление:

$$p_i(x_0, y_0, z_0) T_i(x_0, y_0, z_0) = \iint\limits_{E_i} \left(\frac{\partial T_i}{\partial n_i}\delta - T_i \frac{\partial \delta}{\partial n_i}\right) dE - \iiint\limits_{Q_i} g_i(x, y, z)\delta dQ, \tag{2}$$

которое справедливо для точек (x_0, y_0, z_0), лежащих внутри области Q_i или на ограничивающей ее поверхности E_i. Здесь (x_0, y_0, z_0) – любая фиксированная точка, dE – элемент поверхности E_i, $\partial/\partial n_i$ – производная по внешней к подобласти E_i нормали; функция источника δ имеет вид

$$\delta = 1/r, \quad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Точка (x_0, y_0, z_0) может лежать как внутри или вне области Q, так и на ее границе. Величина $p(x_0, y_0, z_0)$ равна нулю для точек (x_0, y_0, z_0), лежащих вне Q; для внутренних точек $p = 4\pi$; на поверхности E величина $p(x_0, y_0, z_0)$ равна телесному углу, вырезаемому из сферы с центром в точке (x_0, y_0, z_0) поверхностью E при стремлении радиуса этой сферы к нулю – телесный угол при этом должен измеряться внутри области Q.

Обозначив E_{ij} – границу между подобластями E_i и E_j, M_i – множество номеров подобластей E_j, граничащих с подобластью E_i, $\partial/\partial n_{ij}$ – производную по нормали к границе E_{ij}, направленную вовне из подобласти E_i, представим (2) в виде

$$p_i(x_0, y_0, z_0)T_i(x_0, y_0, z_0) = \sum_{j \in M_i} \iint_{E_{ij}} (\delta \frac{\partial T_i}{\partial n_{ij}} - T_i \frac{\partial \delta}{\partial n_{ij}}) dE - \iiint_{Q_i} g_i(x, y, z) \delta dQ. \quad (3)$$

Умножив i-е равенство на величину $\mu_i(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ и просуммировав по i от 1 до M, получим

$$\sum_{i=1}^{M} p_i \mu_i T_i(x_0, y_0, z_0) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j \in M_i} \iint_{E_{ij}} (\mu_i \frac{\partial T_i}{\partial n_{ij}} \delta - \mu_i T_i \frac{\partial \delta}{\partial n_{ij}}) dE -$$
$$- \sum_{i=1}^{M} \iiint_{Q_i} \mu_i g(x, y, z) \delta \, dQ. \quad (4)$$

Так как в этом выражении суммирование по внутренним границам между двумя подобластями E_i и E_j производится дважды: по E_{ij} и E_{ji} (здесь $j>0$), а на границе между E_i и E_j имеет место соотношение $\partial/\partial n_{ij} = -\partial/n_{ji}$, перепишем (4) в виде

$$\sum_{i=1}^{M} p_i \mu_i T_i(x_0, y_0, z_0) = \sum_{i=1}^{M} \iint_{E_{i0}} (\mu_i \frac{\partial T_i}{\partial n_{i0}} \delta - \mu_i T_i \frac{\partial \delta}{\partial n_{i0}}) dE +$$
$$+ \sum_{i=1}^{M} \sum_{j \in M_i} \iint_{E_{ij}} [(\mu_i \frac{\partial T_i}{\partial n_{ij}} - \mu_j \frac{\partial T_j}{\partial n_{ij}}) \delta - (\mu_i T_i - \mu_j T_j) \frac{\partial \delta}{\partial n_{ij}}] dE - \quad (5)$$
$$- \sum_{i=1}^{M} \iiint_{Q_i} \mu_i g_i(x, z) \delta dQ, \qquad (i = \overline{1, M}).$$

Во многих приложениях [3] на внутренних границах $E_{ij} (j > 0)$ должны выполняться условия вида

$$\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial n_{ij}} = \lambda_j \frac{\partial T_j}{\partial n_{ij}}, T_i = T_j. \quad (6)$$

Положив в (5) $\mu_i = \lambda_i$, получим интегральное представление для решения уравнения Пуассона (1) в составной трехмерной области Q, удовлетворяющее условиям (6),

$$T(x_0, y_0, z_0)\sum_{i=1}^{M} p_i\lambda_i = \sum_{i=1}^{M}\iint_{E_{i0}}(\lambda_i \frac{\partial T}{\partial n_{i0}}\delta - \lambda_i T\frac{\partial \delta}{\partial n_{i0}})dE + \\ + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j\in M_i}\iint_{E_{ij}}[(\lambda_i - \lambda_j)T\frac{\partial \delta}{\partial n_{ij}}]dE - \sum_{i=1}^{M}\iiint_{Q_i}\lambda_i g_i(x,z)\delta dQ, \tag{7}$$

здесь принято $T(x,y,z) = T_i(x,y,z)$, если точка (x,y,z) принадлежит подобласти Q_i; функция $T(x,y,z)$ непрерывна во всей составной области Q благодаря граничному условию (6).

Если точка (x_0, y_0, z_0) лежит внутри подобласти Q_k, то из (7) получаем

$$4\pi T(x_0, y_0, z_0) = \sum_{i=1}^{M}\iint_{E_{i0}}(\lambda_i \frac{\partial T}{\partial n_{i0}}\delta - \lambda_i T\frac{\partial \delta}{\partial n_{i0}})dE + \\ + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j\in M_i}\iint_{E_{ij}}[(\lambda_i - \lambda_j)T\frac{\partial \delta}{\partial n_{ij}}]dE - \sum_{i=1}^{M}\iiint_{Q_i}\lambda_i g_i(x,z)\delta dQ.$$

Из формулы (5) можно получить и другое интегральное представление для решения уравнений Пуассона (1) с граничными условиями (6). Положив в (5) $\mu_i = 1$ для всех значений i, с учетом граничных условий получаем

$$T(x_0, y_0, z_0)\sum_{i=1}^{M} p_i(x_0, y_0, z_0) = \sum_{i=1}^{M}\iint_{E_{i0}}(\frac{\partial T}{\partial n_{i0}}\delta - T\frac{\partial \delta}{\partial n_{i0}})dE + \\ + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j\in M_i}\iint_{E_{ij}}(\frac{\partial T_i}{\partial n_{ij}} - \frac{\partial T_j}{\partial n_{ij}})\delta dE - \sum_{i=1}^{M}\iiint_{Q_i} g_i(x,z)\delta dQ. \tag{8}$$

В этой формуле решение выражено через скачки производных по нормали на внутренних границах. Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Если функции $T_i(x,y,z)$ удовлетворяют уравнениям Пуассона (1) и условиям (6) на границах между подобластями $Q_1, Q_2, ..., Q_M$ составной области Q, то имеют место интегральные представления (7), (8).

При помощи полученных интегральных представлений, аналогично [4, 5], краевые задачи для составных трехмерных тел могут быть сведены к интегральным уравнениям.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Агафонова Н.Ю., Михайлов В.Н.* Интегральные представления уравнения Лапласа в составных трехмерных областях // Математика, механика, математическая кибернетика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. С. 7 –10.
2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
3. *Федик И.И., Колесов В.С., Михайлов В.Н.* Температурные поля и термонапряжения в ядерных реакторах. М.: Энергоатомиздат, 1985.
4. *Бобрик А.И., Михайлов В.Н.* Решение некоторых задач для уравнения Пуассона с граничными условиями IV рода // ЖВММФ. 1974. Т. 14.1. С. 126 – 134.
5. *Аккуратов Ю.Н., Михайлов В.Н.* Решение нелинейных стационарных задач теплопроводности с граничными условиями I – IV рода // ЖВММФ. 1984. Т. 24, № 12. С. 1819 – 1826.

УДК 517.977

Н. Л. Андреева

О ЛИНЕЙНО-ВЫПУКЛОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ДВУМЯ ЗАКРЕПЛЁННЫМИ КОНЦАМИ

Рассмотрим задачу оптимального управления, описанную системой линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu, \quad t \in [t_0, t_1], \tag{1}$$

с двумя закреплёнными концами траектории

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \tag{2}$$

с интегральным критерием качества

$$I(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), u(t), t)\,dt \to \inf. \tag{3}$$

Здесь заданные матрица A размерности $n \times n$, векторы b, x_0, x_1 и функция $F(x, u, t)$ таковы, что:

1) пара (A, b) управляемая;

2) $F(x, u, t)$ равномерно выпуклая по (x, u) функция;

3) функция $F(x, u, t)$ ограничена снизу, например $F(x, u, t) \geq 0$;

4) функция $F(x, u, t)$ имеет производные F'_x, F'_u, F''_{uu}, F''_{xt}, F''_{ut};

5) производные F'_x, F'_u удовлетворяют условию Липшица по совокупности переменных (x, u);

6) функция $F(x, u, t)$ такова, что $\lim\limits_{\|x\|_{L_2^n} \to \infty,\ \|u\|_{L_2} \to \infty} I(x, u, t) = +\infty$.