БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Агафонова Н.Ю., Михайлов В.Н.* Интегральные представления уравнения Лапласа в составных трехмерных областях // Математика, механика, математическая кибернетика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. С. 7 –10.

2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

3. *Федик И.И., Колесов В.С., Михайлов В.Н.* Температурные поля и термонапряжения в ядерных реакторах. М.: Энергоатомиздат, 1985.

4. *Бобрик А.И., Михайлов В.Н.* Решение некоторых задач для уравнения Пуассона с граничными условиями IV рода // ЖВММФ. 1974. Т. 14.1. С. 126 – 134.

5. *Аккуратов Ю.Н., Михайлов В.Н.* Решение нелинейных стационарных задач теплопроводности с граничными условиями I – IV рода // ЖВММФ. 1984. Т. 24, № 12. С. 1819 – 1826.

УДК 517.977

Н. Л. Андреева

О ЛИНЕЙНО-ВЫПУКЛОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ДВУМЯ ЗАКРЕПЛЁННЫМИ КОНЦАМИ

Рассмотрим задачу оптимального управления, описанную системой линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu, \ \ t \in [t_0, t_1], \tag{1}$$

с двумя закреплёнными концами траектории

$$x(t_0) = x_0, \ \ x(t_1) = x_1, \tag{2}$$

с интегральным критерием качества

$$I(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), u(t), t)dt \to \inf . \tag{3}$$

Здесь заданные матрица A размерности $n \times n$, векторы b, x_0, x_1 и функция $F(x, u, t)$ таковы, что:

1) пара (A, b) управляемая;

2) $F(x, u, t)$ равномерно выпуклая по (x, u) функция;

3) функция $F(x, u, t)$ ограничена снизу, например $F(x, u, t) \geq 0$;

4) функция $F(x, u, t)$ имеет производные $F_x^{'}$, $F_u^{'}$, $F_{uu}^{''}$, $F_{xt}^{''}$, $F_{ut}^{''}$;

5) производные $F_x^{'}$, $F_u^{'}$ удовлетворяют условию Липшица по совокупности переменных (x, u);

6) функция $F(x, u, t)$ такова, что $\lim\limits_{\|x\|_{L_2^n} \to \infty, \ \|u\|_{L_2} \to \infty} I(x, u, t) = +\infty$.

Задача (1) – (3) с двумя закреплёнными концами траектории безусловно является более сложной, чем задача с одним закреплением $x(t_0)=x_0$. Тем не менее к исследованию этой задачи оказалась применима схема рассуждений, рассмотренная в [1].

Исходную задачу (1) – (3) рассмотрим как задачу нахождения минимума функционала (3) при ограничениях (1), (2), т. е.

$$\min_{(x(t),\, u(t))\in Q} I(x,u), \tag{4}$$

где $Q=\{(x(t),u(t)):\ x(t)\in L_2^n[t_0,t_1];\ u(t)\in L_2[t_0,t_1],$

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x_0+\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\xi)}b\,u(\xi)d\xi,$$

$$x_1=e^{A(t_1-t_0)}x_0+\int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-t_0)}b\,u(\xi)d\xi\},$$

здесь $L_2^n[t_0,t_1]=\{x(t):x(t)=\left(x^1(t),x^2(t),\dots,x^n(t)\right),\ x^p(t)\in L_2[t_0,t_1],\ p=\overline{1-n}\}$; e^{At} – матричная экспонента или фундаментальная система решений для $\dfrac{dx}{dt}=Ax$.

Очевидно, что множество Q выпуклое, при условии 1) управляемости пары (A,b) оно не пусто. В силу условия 6) вместо множества Q можно рассмотреть ограниченное множество

$$Q_0=\{(x,u)\in Q:\ \|x(t)\|_{L_2^n[t_0,t_1]}\le\lambda,\ \ \|u(t)\|_{L_2[t_0,t_1]}\le\lambda\},$$

где $\lambda>0$ – некоторая константа, возможно достаточно большая.

Равномерная выпуклость подынтегральной функции $F(x,u,t)$ обеспечивает строгую выпуклость функционала $I(x,u)$. Тогда исходная задача (1) – (3) будет иметь единственное решение, как задача (4) минимизации строго выпуклого функционала $I(x,u)$ на ограниченном выпуклом замкнутом множестве Q_0 гильбертова пространства.

Пользуясь идеей метода штрафных функционалов, исходную задачу (1) – (3) заменим на последовательность задач минимизации функционалов $I_k(x,u)$ без ограничений

$$\min_{(x,u)\in L_2^{n+1}[t_0,t_1]} I_k(x,u), \tag{5}$$

где

$$I_k(x,u)=I(x,u)+\Phi_k(x,u), \tag{6}$$

$$\Phi_k(x,u)=\frac{1}{\varepsilon_k}\left\| x(t)-e^{A(t-t_0)}x_0-\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\xi)}b\,u(\xi)d\xi\right\|^2_{L_2^n[t_0,t_1]}+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_k}\left\| x_1 - e^{A(t_1-t_0)}x_0 - \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\xi)} b\,u(\xi)\,d\xi \right\|_{R^n}^2, \tag{7}$$

числовая последовательность $\varepsilon_k \downarrow 0$.

Первое слагаемое в формуле (7) есть "штраф" за нарушение дифференциального уравнения (1) и начального условия $x(t_0)=x_0$, второе слагаемое соответствует закреплению траектории в правом конце $x(t_1)=x_1$, и оно не равно нулю, как только это условие нарушается. Слагаемые выбраны таким образом, чтобы для любого $k=1, 2, \ldots$ функционал $\Phi_k(x, u)$ являлся выпуклым. Функционал $I_k(x, u)$ из (6) являлся строго выпуклым, как сумма строго выпуклого и выпуклого функционалов. Для каждого значения $k=1, 2, \ldots$ задача (5) – (7) имеет единственное решение, обозначим его $(x_k(t), u_k(t))$.

ТЕОРЕМА 1. Функции $x_k(t), u_k(t)$ являются единственным решением системы интегральных уравнений

$$\begin{cases} x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\xi)} b\,u(\xi)\,d\xi - \frac{1}{2}\varepsilon_k F_x'(x, u, t), \\ F_u'(x, u, t) + \int_{t}^{t_1} \left(e^{A(\xi-t)}b, F_x'(x, u, \xi)\right)_{R^n} d\xi = \\ = \frac{2}{\varepsilon_k}\left(e^{A(t_1-t)}b, x_1 - e^{A(t_1-t_0)}x_0 - \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\xi)} b\,u(\xi)\,d\xi\right)_{R^n}. \end{cases} \tag{8}$$

Схема доказательства. При условии существования и единственности решения задачи (5) – (7) необходимым и достаточным условием её решения являются уравнения $\operatorname{grad} I_k(x, u)=0$. Если подсчитать $\operatorname{grad} I_k(x, u)$ и преобразовать эти уравнения, учитывая асимптотику по малому параметру ε_k, то получим (8).

ТЕОРЕМА 2. Последовательность $\{x_k(t), u_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ вектор-функций, удовлетворяющих системе уравнений (8), сходится к решению $(x^*(t), u^*(t))$ задачи (1) – (3) в пространстве непрерывных вектор-функций.

Схема доказательства. Из метода штрафных функционалов, ограниченности множества Q_0 получаем ограниченность последовательностей норм $\|x_k(t)\|_{L_2^n[t_0, t_1]}$, $\|u_k(t)\|_{L_2[t_0, t_1]}$ $(k=1, 2, \ldots)$ [2]. Это обеспечивает слабую сходимость в $L_2^{n+1}[t_0, t_1]$ последовательности $\{x_{k_i}(t), u_{k_i}(t)\}_{i=1}^{\infty}$. Используя конкретный вид выпуклых штрафных функционалов $\Phi_k(x, u)$ из (7), можно доказать сходимость норм $\|x_k(t)\|_{L_2^n[t_0, t_1]} \to \|x^*(t)\|_{L_2^n[t_0, t_1]}$,

$\|u_k(t)\|_{L_2[t_0,t_1]} \to \|u^*(t)\|_{L_2[t_0,t_1]}$ при $k \to \infty$, откуда получим сходимость по норме в $L_2^{n+1}[t_0, t_1]$ сначала на подпоследовательности, а затем и на всей последовательности: $\|x_k(t) - x^*(t)\|_{L_2^n[t_0,t_1]} \to 0$, $\|u_k(t) - u^*(t)\|_{L_2[t_0,t_1]} \to 0$ при $k \to \infty$. Исследуя интегральные уравнения (8) для приближённых решений $x_k(t), u_k(t)$ можно доказать, что вектор-функции $x_k(t), u_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны, откуда и получим сходимость последовательности $\{x_k(t), u_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ к решению задачи (1) – (3) в пространстве непрерывных вектор-функций.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Андреева Н. Л.* Интегральные уравнения с малым параметром для решения линейно-выпуклой задачи оптимального управления // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 6 –7.

2. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.

УДК 517.984

Л. П. Белоусова

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ИХ ТОЧНОЕ ОБРАЩЕНИЕ*

Впервые интегральные операторы вида

$$Af(x) = \alpha_1 \int_0^x A_1(x,t) f(t)dt + \alpha_2 \int_x^1 A_2(x,t) f(t)dt + \\ + \alpha_3 \int_0^{1-x} A_3(1-x,t) f(t)dt + \alpha_4 \int_{1-x}^1 A_4(1-x,t) f(t)dt \tag{1}$$

были рассмотрены А.П. Хромовым [1]. В частности, получены формулы точного обращения оператора, показана равносходимость разложений Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора A и в обычный тригонометрический ряд Фурье, при некоторых ограничениях на $A_i(x,t)$ и α_i.

В данной статье рассматривается оператор

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00075, и программы «Ведущие научные школы», проект № 00-15-96123.