$\|u_k(t)\|_{L_2[t_0,t_1]} \to \|u^*(t)\|_{L_2[t_0,t_1]}$ при $k\to\infty$, откуда получим сходимость по норме в $L_2^{n+1}[t_0,t_1]$ сначала на подпоследовательности, а затем и на всей последовательности: $\|x_k(t)-x^*(t)\|_{L_2^n[t_0,t_1]}\to 0$, $\|u_k(t)-u^*(t)\|_{L_2[t_0,t_1]}\to 0$ при $k\to\infty$. Исследуя интегральные уравнения (8) для приближённых решений $x_k(t), u_k(t)$ можно доказать, что вектор-функции $x_k(t), u_k(t)$ $(k=1, 2, \ldots)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны, откуда и получим сходимость последовательности $\{x_k(t), u_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ к решению задачи (1) – (3) в пространстве непрерывных вектор-функций.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Андреева Н. Л.* Интегральные уравнения с малым параметром для решения линейно-выпуклой задачи оптимального управления // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 6 –7.

2. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.

УДК 517.984

Л. П. Белоусова

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ИХ ТОЧНОЕ ОБРАЩЕНИЕ*

Впервые интегральные операторы вида

$$Af(x)=\alpha_1\int_0^x A_1(x,t)f(t)dt+\alpha_2\int_x^1 A_2(x,t)f(t)dt+$$
$$+\alpha_3\int_0^{1-x} A_3(1-x,t)f(t)dt+\alpha_4\int_{1-x}^1 A_4(1-x,t)f(t)dt \tag{1}$$

были рассмотрены А.П. Хромовым [1]. В частности, получены формулы точного обращения оператора, показана равносходимость разложений Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора A и в обычный тригонометрический ряд Фурье, при некоторых ограничениях на $A_i(x,t)$ и α_i.

В данной статье рассматривается оператор

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00075, и программы «Ведущие научные школы», проект № 00-15-96123.

$$Af(x)=\alpha_1\int_0^x A_1(x,t)f(t)dt+\alpha_2\int_x^1 A_2(x,t)f(t)dt+$$
$$+\alpha_3\int_0^{p(x)} A_3(p(x),t)f(t)dt+\alpha_4\int_{p(x)}^1 A_4(p(x),t)f(t)dt, \tag{2}$$

действующий из $L[0,1]$ в $C[0,1]$. Предполагается, что $\delta=(\alpha_1-\alpha_2)^2-(\alpha_3-\alpha_4)^2\neq 0$, $A_i(x,t)$ непрерывно дифференцируемы по x и $A_i(x,x)=1$. Функция $p(x)$ взаимно однозначно отображает отрезок $[0,1]$ на $[0,1]$, $p(x)\in C^1[0,1]$, $p^2(x)=p(p(x))\equiv x$ и $p(x)\not\equiv x$. Множество таких функций $p(x)$ обозначим через P. Для этого класса функций имеют место следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Дробно-линейные функции вида

$$p(x)=\frac{1-x}{\alpha x+1},\qquad \alpha>-1,$$

и только такого вида, принадлежат классу P. Точка $x_0=\dfrac{\sqrt{1+\alpha}-1}{\alpha}$ при $\alpha\neq 0$, или $x_0=\dfrac{1}{2}$ при $\alpha=0$ является неподвижной точкой $p(x)$.

ТЕОРЕМА 2. Если $q(x)$ непрерывно дифференцируемая, взаимно однозначная функция на $[0,1]$ и $q'(x)\neq 0$, то функция

$$p(x)=q^{-1}(b-q(x)),$$

где $b=q(0)+q(1)$, принадлежит классу P. Точка $x_0=q^{-1}\left(\dfrac{b}{2}\right)$ – неподвижная точка $p(x)$.

ТЕОРЕМА 3. Если $q(x)$ непрерывно дифференцируемая, взаимно однозначная функция на $[0,1]$, $q'(x)\neq 0$, $p(x)$ – функция класса P, то и функция

$$p_1(x)=q^{-1}(p(q(x)))$$

также принадлежит классу P. Если x_0 – неподвижная точка $p(x)$, то $x_0^1=q^{-1}(x_0)$ – неподвижная точка $p_1(x)$.

Отметим, что теоремы 2 и 3 справедливы и когда функция $p(x)$ непрерывна.

Теперь займемся вопросом точного обращения оператора (2).

ТЕОРЕМА 4. Обозначим $D=\dfrac{d}{dx}$, E – единичный оператор,

$Qf(x)=(\alpha_1-\alpha_2)f(x)+(\alpha_3-\alpha_4)p'(x)f(p(x))$,

$$S_\beta f(x)=\alpha_1\int_0^x (D+\beta E)A_1(x,t)f(t)dt+\alpha_2\int_x^1 (D+\beta E)A_2(x,t)f(t)dt+$$

$$+\alpha_3\int_0^{p(x)}(D+\beta E)A_3(p(x),t)f(t)dt+\alpha_4\int_{p(x)}^1(D+\beta E)A_4(p(x),t)f(t)dt.$$

Тогда если A^{-1} существует, то найдется такое число β, что оператор $(Q+S_\beta)^{-1}$ существует и

$$A^{-1}y(x)=(Q+S_\beta)^{-1}(D+\beta E)y(x),$$

$$y(0)=\int_0^1(\alpha_2A_2(0,t)+\alpha_3A_3(1,t))(Q+S_\beta)^{-1}(D+\beta E)y(t)dt.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи, когда существование A^{-1} можно доказать, а не предполагать это трудно проверяемое условие теоремы 4.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\alpha_2=\alpha_4=0$ и $A_1(x,t)\equiv A_3(x,t)$, тогда A^{-1} существует, область определения оператора A^{-1} состоит из абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих условию

$$\alpha_1 y(0)-\alpha_3 y(1)=0,$$

и справедлива формула

$$A^{-1}y(x)=\frac{1}{\delta}(E+N)^{-1}D(\alpha_1 y(x)-\alpha_3 y(p(x))),$$

где $Nf(x)=\int_0^x N(x,t)f(x)dt,\quad N(x,t)=DA_1(x,t).$

Имеет место аналогичный результат в случае $\alpha_1=\alpha_3=0$ и $A_2(x,t)\equiv A_4(x,t)$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $A_i(x,t)\equiv 1,\quad i=\overline{1,4}$. Тогда A^{-1} существует и

$$A^{-1}y(x)=\frac{1}{\delta}D((\alpha_1-\alpha_2)y(x)-(\alpha_3-\alpha_4)y(p(x))),$$

$$(\alpha_1+\alpha_4)y(0)-(\alpha_2+\alpha_3)y(1)=0.$$

Укажем еще один случай точного обращения.

ТЕОРЕМА 7. Оператор

$$Af(x)=\alpha_1\int_{x_0}^x A_1(x,t)f(t)dt+\alpha_3\int_{x_0}^{p(x)}A_3(p(x),t)f(t)dt,$$

где x_0 – неподвижная точка $p(x)$, является вольтерровым. Если $\alpha_1^2-\alpha_3^2\neq 0$, то он обратим и

$$A^{-1}y(x) = \frac{1}{\delta}D(\alpha_1 y(x) - \alpha_3 y(p(x))) +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} N_{1,1}(x,t)y'(t)dt + \int_{x_0}^{p(x)} N_{1,2}(x, p(t))y'(t)dt,$$

где $N_{i,j}(x,t)$ – компонента ядра оператора

$$N = \left(B(x) + \int_{x_0}^{x} \widetilde{A}'_x(x,t)dt \right)^{-1} - B^{-1}(x)$$

в пространстве $L_2[0,1] \times L_2[0,1]$ и

$$\widetilde{A}(x,t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 A_1(x,t) & \alpha_3 A_3(p(x), p(t))p'(t) \\ \alpha_3 A_3(x,t) & \alpha_1 A_1(p(x), p(t))p'(t) \end{pmatrix}, \qquad B(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 p'(x) \\ \alpha_3 & \alpha_1 p'(x) \end{pmatrix}.$$

При этом $y(x)$ удовлетворяет краевому условию $y(x_0) = 0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромов А.П.* Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Мат. заметки. 1998. Т. 64 (6). С. 932 – 949.

УДК 519.8:69, 519.8:656

Ю. А. Блинков, В. А. Иванов, А. Д. Ковалев, В. В. Мозжилкин, А. А. Орел

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПЕРАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ГРУЗОПЕРЕВОЗКАМИ ПО ЖЕЛЕЗНОЙ ДОРОГЕ

В данной статье рассматриваются проблемы оперативного управления грузовыми перевозками и построения соответствующей информационной системы сменно-суточного планирования.

Реализация процесса формирования планов эксплуатационной работы дороги на смену, на сутки с необходимым качеством затрудняется рядом причин:

- сложность задачи оптимального планирования железнодорожных перевозок ввиду многопараметричности, многокритериальности и многоэкстремальности задачи, а, следовательно, нахождение оптимального решения в полном объеме за приемлемое время невозможно, кроме того, остается открытым вопрос о формировании критериев оптимальности;
- недостоверность и несвоевременность (большое запаздывание) поступления информации к руководящим работникам службы, принимающим на основе этой информации решения и меры по