ми простым степеням x, а $\hat{E}_n(\hat{q})$ – величина наилучшего приближения функции $\hat{q}$ алгебраическими полиномами степени $\le n$, у которых коэффициенты при составных степенях x равны 0.

Утверждение теоремы 2 получается в результате предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ в соотношениях для величин $E_n^*(q)$ и $\hat{E}_n(\hat{q})$, имеющих место на отрезке $[0,1-\varepsilon]$.

ТЕОРЕМА 3. Имеют место следующие соотношения:

$$E_n(q) \le \varphi(n) E_n^*(q),$$

где $\varphi(n)$ – некоторая функция, удовлетворяющая условию $\varphi(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Утверждение теоремы 3 проводится сначала для случая характера Дирихле, а затем используется результат, доказанный В.В. Глазковым [3], о том, что если $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+s}$ – произвольные корни из единицы, то существует характер Дирихле $\chi(n)$ такой, что $\chi(n) = a_n, \ldots, \chi(n+s) = a_{n+s}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Чудаков Н.Г., Родосский К.А.* Об обобщённом характере // ДАН СССР. 1950. Т. 73. С. 1137 – 1139.

2. *Кузнецов В.Н.* К задаче описания рядов Дирихле, определяющих целые функции // Тр. 3-й Сарат. зимней шк. по теории функций и приближений. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1988. Ч. 2. С. 113 – 115.

3. *Глазков В.В.* Характеры мультипликативной полугруппы натуральных чисел // Исследования по теории чисел. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1968. Вып. 2. С. 3 – 40.

УДК 517.5

С. С. Волосивец

СИЛЬНЫЙ $\mathbb{P}$-ИЧНЫЙ ИНТЕГРАЛ И СИЛЬНАЯ $\mathbb{P}$-ИЧНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ*

Пусть $\mathbb{P} = \{p_j\}_{|j| \in N}$, $p_j \in N$, $2 \le p_j \le C$, $p_{-j} = p_j$. Положим $m_j = p_1 \ldots p_j$ при $j \in N$, $m_0 = 1$ и $m_{-l} = \frac{1}{m_l}$ при $l \in N$.

Каждому $x \in [0, +\infty)$ можно сопоставить разложение

* Работа выполнена при поддержке программы «Ведущие научные школы», проект № 00-15-96123.

$$x=\sum_{j=1}^{K(x)} x_{-j} m_{j-1}+\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{m_j},\ 0\le x_j<p_j,\ 0\le x_{-j}<p_j,\ j\in \boldsymbol{N}. \qquad (1)$$

Оно определяется однозначно, если при $x=\dfrac{k}{m_n}$ брать разложения с конечным числом ненулевых x_i. Коэффициенты разложения можно находить по формулам $x_j=[x m_j](\operatorname{mod} p_j)$ и $x_{-j}=[x/m_{j-1}](\operatorname{mod} p_j)$. Число $K(x)$ в (1) равно нулю при $x<1$, в противном случае наибольшему натуральному j, такому что $x_{-j}\ne 0$. Если

$$y=\sum_{j=1}^{K(y)} y_{-j} m_{j-1}+\sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{m_j},\ 0\le y_{-j}, y_j<p_j, \qquad (1')$$

то для $x, y\in[0,+\infty)$, записанных в виде (1) и (1′), определим $x\oplus y$ равенством

$$x\oplus y=\sum_{j=1}^{\max(K(x),\ K(y))} z_{-j} m_{j-1}+\sum_{j=1}^{\infty} z_j/m_j,$$

где $z_j\in\{0,1,\ldots,p_j-1\}$ и $z_j=x_j+y_j(\operatorname{mod} p_j)$ при всех $j\in \boldsymbol{Z}$.
Для $x\ominus y$ определение аналогично, только $z_j=x_j-y_j(\operatorname{mod} p_j)$. Определим также ядро $\chi(x,y)$ равенством

$$\chi(x,y)=\exp\left(2\pi i\left(\sum_{j=1}^{K(y)} x_j y_{-j}/p_j+\sum_{j=1}^{K(x)} x_{-j} y_j/p_j\right)\right).$$

Для $f\in L(\boldsymbol{R}_+)$ мультипликативное преобразование Фурье определим формулой

$$\hat f(x)=F[f](x)=\int_{\mathbf{R}_+} f(y)\overline{\chi(x,y)}\,dy.$$

Для $f\in L^2(\boldsymbol{R}_+)$ $F[f]$ определяется как предел последовательности $\int_0^{m_n}\overline{\chi(x,y)}f(y)\,dy$ в $L^2(\boldsymbol{R}_+)$. Кроме существования $F[f]$ имеет местс также равенство Планшереля $\|F[f]\|_{L^2(\mathbf{R}_+)}=\|f\|_{L^2(\mathbf{R}_+)}$ [1, с. 131 – 135]. Как и для обычного преобразования Фурье, из сходимости f_n к f из $L(\boldsymbol{R}_+)$ следует равномерная сходимость $\hat f_n$ к $\hat f$ на $\boldsymbol{R}_+$. Для $f, g\in L[0,+\infty]$ положим по определению

$$f * g(x)=\int_0^{+\infty} f(t)g(x\ominus t)\,dt.$$

Далее через X_E будем обозначать характеристическую функцию множества E, а через I_k^n – полуинтервал $[k/m_n,(k+1)/m_n)$. Будем называть $f(x)$ $\mathbb{P}$- непрерывной в точке $x\in \boldsymbol{R}_+$, если

$$\lim_{n\to+\infty}\ \sup_{0<h<1/m_n}|f(x\oplus h)-f(x)|=0.$$

Имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 1 [1, с. 134]. Пусть $f \in L(\boldsymbol{R}_+)$ и $\hat{f} \in L(\mathbf{R}_+)$. Тогда в каждой точке $\mathbb{P}$- непрерывности $f(x)$ имеет место равенство

$$f(x)=\int_0^{+\infty} \hat{f}(y)\chi(x,y)\,dy.$$

Пусть $S_Y(f)(x)=\int_0^Y \hat{f}(t)\chi(x,t)\,dt$. Следующая лемма является аналогом теоремы 10 из [2, с. 429].

ЛЕММА 2. Если $f \in L(\mathbf{R}_+)$, то $\lim\limits_{n\to+\infty}\|S_{m_n}(f)-f\|_{L(\mathbf{R}_+)}=0$ и $\lim\limits_{n\to+\infty}\|S_{1/m_n}(f)\|_{L(\mathbf{R}_+)}=\hat{f}(0)$.

ЛЕММА 3. Пусть

$$a_{k,n}(x)=\frac{1}{m_n}\chi(k/m_n,x)\mathrm{X}_{[0,m_n)}, \tag{2}$$

где $k \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{Z}_+$. Тогда $\hat{a}_{k,n}=\mathrm{X}_{[k/m_n,(k+1)/m_n)}=\mathrm{X}_{I_k^n}$.

ЛЕММА 4. Если $k \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{Z}_+$, то существует единственное $r \in \boldsymbol{Z}$, такое что $I_k^n \subset [m_r, m_{r+1})$.

Рассмотрим теперь ступенчатую функцию W_n, равную $p_1+\dots p_n+p_1+\dots p_k-(n+k+1)$ на $[1/m_{k+1},1/m_k)$ при $k>0$, а при $-n \le k \le 0$ $W_n=p_{|k|+1}+\dots p_n-(n-|k|+1)$ на $[m_{|k|-1},m_{|k|})$. На $[m_n,+\infty)$ пусть $W_n=0$. При условии $p_k \le C$ мы можем гарантировать $W_n \in L[0,+\infty)$.

Если для некоторой $f \in L(\boldsymbol{R}_+)$ найдется $g \in L(\boldsymbol{R}_+)$, такая что $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f*W_n-g\|_{L(\mathbf{R}_+)}=0$, то $g=J(f)$ назовем модифицированным сильным мультипликативным интегралом (МСМИ) для f.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f,g \in L(\mathbf{R}_+)$. Тогда $g=J(f)$ в том и только в том случае, когда $\hat{g}(0)=0$ и $\hat{g}(x)=\hat{f}(x)h(x)$ при $x>0$, где $h(x)=1/m_n$ при $x \in [m_n,m_{n+1})$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

ТЕОРЕМА 2. Каждая из функций $a_{k,n}$, определяемых равенством (2), имеет МСМИ и является собственной функцией оператора J с собственным значением $1/m_r$, где r по лемме 4 однозначно определяется вложением $I_k^n \subset [m_r,m_{r+1})$.

СЛЕДСТВИЕ 1. $J(a_{1,n})=m_n a_{1,n}$.

В самом деле $[1/m_n,2/m_n)\subset[1/m_n,1/m_{n-1})$, то есть $r=-n$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Линейный оператор J неограничен на своей области определения.

Если для $f \in L(\mathbf{R}_+)$ существует $\varphi \in L(\mathbf{R}_+)$, такая что $\lim_{n \to +\infty} \|f * \Lambda_n - \varphi\|_{L(\mathbf{R}_+)} = 0$, то $\varphi = D(f)$ назовем модифицированной сильной мультипликативной производной (МСМП) для f, где $\Lambda_n = \sum_{k=-n}^{n} \sum_{j=1}^{p_k - 1} \chi\left(\frac{j}{m_k}, x\right) X_{[0, m_k)}(x) m_k^{-2}$ – последовательность ядер.

ТЕОРЕМА 3. Если у $f \in L(\mathbf{R}_+)$ существует МСМП $\varphi \in L(\mathbf{R}_+)$, то $\hat{\varphi}(0) = 0$ и $\hat{\varphi}(x) = \hat{f}(x)/h(x)$ при $x > 0$, где $h(x)$ определена в теореме 2.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если для $f \in L(\mathbf{R}_+)$ существует МСМП $D(f)$ и при этом $\hat{f}(0) = 0$, то для $D(f)$ существует МСМИ, причём $J(D(f)) = f$.

ТЕОРЕМА 4. Если для $f \in L(\mathbf{R}_+)$ существует МСМИ $J(f)$ и при этом $\hat{f}(0) = 0$, то для $J(f)$ существует МСМП, причём $D(J(f)) = f$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Каждая из функций $a_{k,n}$, где $k \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{Z}_+$, является собственной функцией оператора D, причём $D(a_{k,n}) = m_r a_{k,n}$, где r определяется вложением $I_k^n \subset [m_r, m_{r+1})$ по лемме 4.

СЛЕДСТВИЕ 5. Оператор D неограничен на своей области определения.

При $p_k = 2$ результаты работы получены Б. И. Голубовым [3].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.

2. *Schipp F., Wade W.R., Simon P.* Walsh series. Budapest.: Akademiai Kiado, 1990.

3. *Голубов Б.И.* О взаимной обратимости сильного двоичного интеграла и производной // Современные проблемы теории функций и её приложения. Саратов: Гос. УНЦ, «Колледж», 2002. С. 51 – 52.

УДК 517.518.82

И. Ю. Выгодчикова

ОБ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ДИСКРЕТНОГО МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ

1. Постановка задачи. Пусть $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_N \le 1$, $\Phi(\cdot)$ – дискретное многозначное отображение с образами в виде отрезков $\Phi(t_k) = [y_{1,k} ; y_{2,k}]$, причём $y_{2,k} \ge y_{1,k}$, $k \in [0 : N]$;