УДК 519.8

С. В. Галаев, П. П. Комков

СОГЛАСОВАНИЕ ПРЕДПОЧТЕНИЙ В РЕШЁТКЕ ОТНОШЕНИЙ

1. Проблема согласования предпочтений состоит в сведении нескольких индивидуальных мнений о порядке предпочтения объектов в единое "коллективное" предпочтение. Существует два основных подхода к этой проблеме: аксиоматический и процедурный. Аксиоматический подход восходит к знаменитой работе Эрроу [1, 2], в которой было установлено, что система естественных аксиом для согласования ранжирований является противоречивой. Из процедур согласования предпочтений наиболее известной и употребительной на практике является правило большинства (а также его различные модификации). Однако это правило обладает существенным недостатком: оно может привести к нетранзитивному итоговому отношению, даже если все исходные отношения транзитивны (парадокс Кондорсе). В начале 70-х гг. Дж. Кемени была предложена процедура согласования отношений предпочтения, основанная на введении метрики в пространстве отношений [3] – построение так называемой медианы. Отправляясь от этой идеи, в работе [2] было дано описание медиан для отношений эквивалентности и квазипорядка. В данной статье рассматривается аналогичный подход для более общих классов отношений: единственное требование, накладываемое на тип отношений, состоит в свойстве замкнутости относительно пересечения. Также изучаются некоторые системы аксиом для правил согласования предпочтений, которые являются менее "жесткими", чем система аксиом Эрроу.

2. Под отношением предпочтения на множестве A понимается произвольное рефлексивное бинарное отношение $\rho \subseteq A^2$ (высказывание $(a,b) \in \rho$ интерпретируется так, что объект a является не менее предпочтительным, чем объект b).

Пусть I – произвольное множество (интерпретируется как множество индивидуумов). Под правилом согласования предпочтений индивидуумов I понимается отображение, которое каждому набору отношений предпочтения $(\rho_i)_{i\in I}$, где $\rho_i \subseteq A^2$, ставит в соответствие отношение предпочтения $\rho = F[(\rho_i)_{i\in I}]$ на множестве A. Далее будем предполагать, что индивидуальные отношения предпочтения $\rho_i, (i \in I)$, а также согласованное отношение предпочтения ρ принадлежат некоторому семейству S, которое замкнуто относительно теоретико-множественного пресечения. В этом случае множество S образует полную решетку относительно операций инфимума $\inf$ и супремума $\sup$.

Рассмотрим следующие две аксиомы для правила согласования предпочтений.

АКСИОМА A_1: Если $\rho_i = \rho^*$ для всех $i \in I$, то $F[(\rho_i)_{i\in I}] = \rho^*$.

АКСИОМА B_1: Если для каждого $i \in I$ справедливо $\rho_i \subseteq \bar{\rho}_i$, то $F[(\rho_i)_{i\in I}] \subseteq F[(\bar{\rho}_i)_{i\in I}]$.

ТЕОРЕМА 1. Если правило согласования предпочтений удовлетворяет аксиомам (A_1, A_2), то для любого набора отношения предпочтения $(\rho_i)_{i\in I}$ выполняется

$$\inf_{i\in I} \rho_i \subseteq F[(\rho_i)_{i\in I}] \subseteq \sup_{i\in I} \rho_i. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $(a,b) \in \bigcap_{i\in I} \rho_i$. Тогда при каждом $i \in I$ выполняется $\Delta \bigcup \{(a,b)\} \subseteq \rho_i$ (где Δ – тождественное отношение на A).

По аксиоме B_1 получаем включение $F[(\Delta \bigcup \{(a,b)\}_{i\in I}] \subseteq F[(\rho_i)_{i\in I}]$. По аксиоме A_1 левая часть этого включения есть $\Delta \bigcup \{(a,b)\}$, откуда $(a,b) \in F[(\rho_i)_{i\in I}]$. Показано, что $\bigcap_{i\in I} \rho_i \subseteq F[(\rho_i)_{i\in I}]$, а так как в решетке S имеет место $\rho_i = \bigcap_{i\in I} \rho_i$, получаем доказательство левой части (1).

Для доказательства правой части (1) рассмотрим включение $\rho_i \subseteq \sup_{j\in I} \rho_j$, справедливое при любом $i \in I$. Используя последовательно аксиомы B_1 и A_1, имеем:

$$F[(\rho_i)_{i\in I}] \subseteq F\left[(\sup_{j\in I} \rho_j)_{i\in I}\right] = \sup_{j\in I} \rho_j.$$

Итак, приняв аксиомы A_1 и B_1 (которые представляют собой очень слабые требования), мы получаем в качестве их следствия следующее.

Правило 1. Согласованное отношение предпочтения должно находиться в интервале $\left[\inf_{i\in I} \rho_i, \sup_{i\in I} \rho_i\right]$.

3. Возьмем 2 модифицированные аксиомы Эрроу.

АКСИОМА A_2 (аксиома поточечной изотопности): Пусть $(\rho_i)_{i\in I}$, $(\bar{\rho}_i)_{i\in I}$ – два набора отношений предпочтения. Если для элементов $a,b \in A$ при любом $i \in I$ справедлива импликация

$$(a,b) \in \rho_i \Rightarrow (a,b) \in \bar{\rho}_i,$$

тогда имеет место импликация

$$(a,b) \in F[(\rho_i)_{i\in I}] \Rightarrow (a,b) \in F[(\bar{\rho}_i)_{i\in I}].$$

АКСИОМА B_2 (ненавязанность группового решения): Пусть $a,b \in A$, $a \neq b$. Тогда найдутся такие два набора отношений предпочтения на A: $(\rho_i^{'})_{i \in I}$, $(\rho_i^{''})_{i \in I}$, что

α) $(a,b) \in F[(\rho_i^{'})_{i \in I}]$;

β) $(a,b) \notin F[(\rho_i^{''})_{i \in I}]$.

ТЕОРЕМА 2. Из системы аксиом (A_2,B_2) следуют аксиомы A_1 и B_1.

Доказательство. Пусть $(\rho_i)_{i \in I}$ – произвольный набор отношений предпочтения на A, $a,b \in A$, $a \neq b$. Тогда:

1) если для всех $i \in I$ справедливо $(a,b) \in \rho_i$, то $(a,b) \in F[(\rho_i)_{i \in I}]$;

2) если для всех $i \in I$ справедливо $(a,b) \notin \rho_i$, то $(a,b) \notin F[(\rho_i)_{i \in I}]$.

Действительно, покажем 1). По аксиоме B_2 найдется набор отношений предпочтения $(\rho_i^{'})_{i \in I}$ на A, для которого $(a,b) \in F[(\rho_i^{'})_{i \in I}]$. Так как при каждом $i \in I$ выполняется (в силу истинности следствия) импликация

$(a,b) \in \rho_i^{'} \Rightarrow (a,b) \in \rho_i$,

то по аксиоме A_2 справедливо условие

$$(a,b) \in F[(\rho_i^{'})_{i \in I}] \Rightarrow (a,b) \in F[(\rho_i)_{i \in I}]. \quad (2)$$

Посылка импликации (2) по предположению истинна, поэтому справедливо и следствие, что доказывает 1).

Покажем 2). По аксиоме $B2$ найдется набор отношения предпочтения $(\rho_i^{''})_{i \in I}$ на A для которого $(a,b) \notin F[(\rho_i^{''})_{i \in I}]$. Тогда при каждом $i \in I$ выполняется (в силу ложности посылки)

$(a,b) \in \rho_i \Rightarrow (a,b) \in \rho_i^{''}$,

то по аксиоме A_2 справедлива импликация

$$(a,b) \in F[(\rho_i)_{i \in I}] \Rightarrow (a,b) \in F[(\rho_i^{''})_{i \in I}]. \quad (3)$$

Так как следствие импликации (3) ложно, то ложна и посылка, то есть $(a,b) \notin F[(\rho_i)_{i \in I}]$.

Из утверждений 1) и 2) следует,

$$\bigcap_{i \in I} \rho_i \subseteq F[(\rho_i)_{i \in I}] \subseteq \bigcup_{i \in I} \rho_i \quad (4)$$

Полагая в (4) $\rho_i = \rho^*$ для всех $i \in I$, получаем $F[(\rho_i)_{i \in I}] = \rho^*$, то есть проверили аксиому A_1. Ясно, что аксиома B_1 является следствием аксиомы B_2.

Утверждение 2 доказано.

4. Приняв указанные выше аксиомы A_2 и B_2 (или A_1, B_1), мы должны для семейства отношений предпочтения $(\rho_i)_{i \in I}$ выбирать в качестве согласованного отношения предпочтения отношение ρ, принадлежащее интервалу $[\rho^1, \rho^2]$, где $\rho^1 = \inf_{i \in I} \rho_i$, $\rho^2 = \sup_{i \in I} \rho_i$. В соответствии с подходом

Дж. Кемени в качестве итогового отношения предпочтения выступает отношение предпочтения $\rho \subseteq A^2$, для которого $\sum_{i \in I} d(\rho, \rho_i)$ делается минимальной, где d – метрика Хэминга [2] (ρ называется медианой элементов $(\rho_i)_{i \in I}$).

Можно показать, что если решетка S метрическая [4], то медиана элементов $(\rho_i)_{i \in I}$ всегда попадает в интервал $\left[\inf_{i \in I} \rho_i, \sup_{i \in I} \rho_i\right]$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Льюс Р., Райфа Х.* Игры и решения. М.: Изд-во иностр. лит. 1961.

2. *Миркин Б.Г.* Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974.

3. *Кемени Дж., Снелл Дж.* Кибернетическое моделирование. М.: Советское радио, 1972.

4. *Биргкгоф Г.* Теория решёток. М.: Наука, 1984.

УДК 517.984

О. Б. Горбунов

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИРАКА С НЕИНТЕГРИРУЕМОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА*

Рассмотрим краевую задачу $L = L(\alpha, \beta, \gamma, \mu, \eta, Q(x))$:

$$By' + (Q_{<0>}(x) + Q(x))y = \lambda y, \quad 0 < x < \pi, \tag{1}$$

$$V_1^T(\alpha)y(0) = V_1^T(\beta)y(\pi) = 0, \tag{2}$$

где

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad Q_{<0>}(x) = \frac{\mu}{x-\gamma}\begin{pmatrix} \sin 2\eta & \cos 2\eta \\ \cos 2\eta & -\sin 2\eta \end{pmatrix}, \quad \gamma \in (0, \pi), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q(x) = \begin{pmatrix} q_1(x) & q_2(x) \\ q_2(x) & -q_1(x) \end{pmatrix}, \quad V(\alpha) = (V_1(\alpha), V_2(\alpha)) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$ T – знак транспонирования.

Здесь $q_k(x)$ – комплекснозначные функции, μ, α, β, η – комплексные числа. Пусть для определенности $\operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}\beta, \operatorname{Re}\eta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\operatorname{Re}\mu > 0$, $\mu + 1/2 \notin \mathrm{N}$, и пусть $|x-\gamma|^{-2\operatorname{Re}\mu} |q_k(x)| \in \mathrm{L}(0, \pi)$, $q_k(x) \in W_1^1(0, \pi)$, $k = 1,2$.

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00741.