УДК 517.54

Е. В. Григорьева

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ФУНКЦИИ ПИКА*

Обозначим через $S(M)$ класс голоморфных однолистных в единичном круге D функций

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots, \qquad z\in D,$$

таких, что $|f(z)|<M$. Функция Пика

$$P_M(z)=MK^{-1}\left(\frac{K(z)}{M}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}p_n(M)z^n\in S(M), \qquad K(z)=\frac{z}{(1-z)^2},$$

является экстремальной во многих задачах на классе $S(M)$. Так, в работе [1] рассмотрен линейный функционал

$$L(\alpha,\beta;f)=a_5+\alpha a_4+\beta a_3+3\alpha a_2$$

и найдено множество $E\subset\mathbf{R}^2$ такое, что для всякой точки $(\alpha,\beta)\in E$ существует $M(\alpha,\beta)>1$, обладающее свойством, что функция Пика P_M доставляет $\max\operatorname{Re}L(\alpha,\beta;f)$ в классе $S(M)$ для всех $M\in(1,M(\alpha,\beta))$. Таким образом, $M(\alpha,\beta)$ служит оценкой радиуса окрестности тождественной функции, в которой функции Пика обладают экстремальными свойствами по отношению к функционалу $L(\alpha,\beta;f)$.

Доказательство теоремы в работе [1] опиралось на теорему существования обратного отображения, которое выражает зависимость решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений от начальных данных. Принцип сжатых отображений и другие методы функционального анализа предлагают конструктивный вывод о существовании неявного и обратного отображения [2, с. 231], позволяющий оценить радиус окрестности заданной точки, где оно определено. Подобный подход дает возможность найти нижние оценки величин $M(\alpha,\beta)$.

Опишем подробнее алгоритм нахождения оценки $M(\alpha,\beta)$. С помощью дифференциального уравнения Левнера выводим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt}=G(t,X,u), \qquad X(0)=0, \tag{1}$$

представляющую систему коэффициентов экстремальной функции по формуле $X(\log M)=(a_2,a_3,a_4,a_5)^T$. Система (1) является управляемой, в

---

* Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00123.

ее правую часть входит неизвестная функция $u = u(t)$, называемая управлением.

Функция Гамильтона для системы (1) имеет вид

$$H(t, X, \overline{\psi}, u) = \operatorname{Re} G\overline{\psi},$$

где вектор $\overline{\psi}$ удовлетворяет сопряженной системе и условиям трансверсальности

$$\frac{d\overline{\psi}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial X}, \qquad \overline{\psi}(\log M) = (3\alpha, \beta, \alpha, 1)^T. \tag{2}$$

В каждой точке непрерывности управление $u(t)$ доставляет максимум функции Гамильтона, поэтому оно является корнем уравнения

$$H_u(t, X, \overline{\psi}, u) = 0. \tag{3}$$

При выполнении условий регулярности

$$H_{uu}(t, X, \overline{\psi}, u) \neq 0$$

уравнение (3) определяет неявную функцию $u = u(t, X, \overline{\psi})$.

Заменим условие трансверсальности в системе (2) на начальное условие $\psi(0) = \xi$ и рассмотрим отображение

$$F : \xi \to \psi(\log M).$$

Обозначим через $\xi^0 = \psi(0)$ значение решения системы (2) в точке $t = 0$, если в ней положено $u = \pi$.

1-й шаг. Находим M_1 такое, что для всех $M \in (1, M_1)$ выполняется неравенство $\left\|(F')^{-1}(\xi^0)\right\| \leq 2$.

2-й шаг. Для заданного l находим M_2 такое, что для всех $M \in (1, M_2)$ и всех ξ, $\left\|\xi - \xi^0\right\| \leq l$, выполняется неравенство

$$\left\|F'(\xi) - F'(\xi^0)\right\| \leq \frac{1}{4}.$$

3-й шаг. Находим l_1 такое, что неравенство $\left\|\xi - \xi^0\right\| \leq l_1$ обеспечивает неравенство

$$H_{uu}(0, 0, \xi, u(0, 0, \xi)) \leq \frac{H_{uu}(0, 0, \xi^0, \pi)}{2}.$$

4-й шаг. Находим M_3 такое, что для всех $M \in (1, M_3)$ выполняется условие

$$\left\|F'(\xi^0) - \xi^0\right\| \leq \frac{l_1}{8}.$$

5-й шаг. Находим M_4 такое, что для всех $M \in (1, M_4)$ выполняется условие $\operatorname{Re} F(\xi^0) \in E$.

6-й шаг. Находим M_5 такое, что для всех $t \in (0, \log M_5)$ и ξ, $\|\xi - \xi^0\| \le l_1$, выполняется неравенство

$$H_{uu}(t, X, \overline{\psi}, u) \le \frac{H_{uu}(0,0,\xi^0,\pi)}{4}.$$

Реализация всех шести шагов приводит к следующей теореме.

ТЕОРЕМА. Пусть $(\alpha,\beta) \in E$, $l = l_1$ и числа $M_1, \ldots, M_5$ определены шагами 1, …, 6. Тогда $M(\alpha,\beta) \ge \min\limits_{1 \le k \le 5} M_k$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Григорьева Е.В.* Оценка линейного функционала для однолистных функций, близких к тождественной // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 25 – 27.
2. *Рудин У.* Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.

УДК 511.23

Г. И. Гусев

О КАНОНИЧЕСКИХ ФОРМАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В *P*-АДИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

Пусть p – нечетное простое, Q_p – поле p-адических чисел, O_p – кольцо целых p-адических чисел и U_p – группа единиц поля Q_p, $f(x,y) = \sum\limits_{\alpha \ge 0,\, \beta \ge 0} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$ – степенной ряд с целыми p-адическими коэффициентами, подчиненными условию $\lim\limits_{\alpha+\beta \to \infty} a_{\alpha\beta} = 0$. В этом случае $f(x,y)$ представляет собой аналитическую функцию на компакте $O_p \times O_p$ [1].

ТЕОРЕМА. Если аналитическая функция $f(x,y)$ такова, что для каждого решения (x_0, y_0) системы сравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} \equiv 0 (\operatorname{mod} p) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \equiv 0 (\operatorname{mod} p) \end{cases} \qquad (1)$$

выполняется условие