5-й шаг. Находим M_4 такое, что для всех $M \in (1, M_4)$ выполняется условие $\operatorname{Re} F(\xi^0) \in E$.

6-й шаг. Находим M_5 такое, что для всех $t \in (0, \log M_5)$ и ξ, $\left\|\xi - \xi^0\right\| \le l_1$, выполняется неравенство

$$H_{uu}(t, X, \overline{\psi}, u) \le \frac{H_{uu}(0,0,\xi^0,\pi)}{4}.$$

Реализация всех шести шагов приводит к следующей теореме.

ТЕОРЕМА. Пусть $(\alpha,\beta) \in E$, $l = l_1$ и числа $M_1,\ldots,M_5$ определены шагами 1, …, 6. Тогда $M(\alpha,\beta) \ge \min\limits_{1 \le k \le 5} M_k$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Григорьева Е.В.* Оценка линейного функционала для однолистных функций, близких к тождественной // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 25 – 27.
2. *Рудин У.* Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.

УДК 511.23

Г. И. Гусев

О КАНОНИЧЕСКИХ ФОРМАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В *P*-АДИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

Пусть p – нечетное простое, Q_p – поле p-адических чисел, O_p – кольцо целых p-адических чисел и U_p – группа единиц поля Q_p, $f(x,y) = \sum\limits_{\alpha\ge 0,\ \beta\ge 0} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$ – степенной ряд с целыми p-адическими коэффициентами, подчиненными условию $\lim\limits_{\alpha+\beta\to\infty} a_{\alpha\beta} = 0$. В этом случае $f(x,y)$ представляет собой аналитическую функцию на компакте $O_p \times O_p$ [1].

ТЕОРЕМА. Если аналитическая функция $f(x,y)$ такова, что для каждого решения (x_0, y_0) системы сравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} \equiv 0 (\operatorname{mod} p) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \equiv 0 (\operatorname{mod} p) \end{cases} \qquad (1)$$

выполняется условие

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \tag{2}$$

является p-адической единицей.

Тогда в компакте $K_{x_0,\,y_0} = (x_0 + pO_p)\times(y_0 + pO_p)$:

1) существует и притом единственное решение $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}; \tag{3}$$

2) для ряда Тейлора функции $f(x,y)$

$$T_\theta f(x,y) = f(\theta_1,\theta_2) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\theta_1,\theta_2)(x-\theta_1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\theta_1,\theta_2)(x-\theta_1)(y-\theta_2) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\theta_1,\theta_2)(y-\theta_2)^2\right) + \ldots$$

на компакте $K_{x_0,\,y_0}$ имеет место изометрическая эквивалентность

$$T_\theta f(x,y) \cong f(\theta_1,\theta_2) + \frac{1}{2!}d_\theta^{(2)} f(x,y), \tag{4}$$

где $d_\theta^{(2)} f(x,y)$ – второй дифференциал $f(x,y)$ в точке θ.

Доказательство. Ввиду условия (2) вектор-функция $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^t$ на компакте $K_{x_0,\,y_0}$ изометрически эквивалентна линейной вектор-функции [1] вида

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0) \end{pmatrix}.$$

В силу условия (1) система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0) = 0 \end{cases}$$

имеет и притом единственное решение в компакте $K_{x_0,\,y_0}$.

Для доказательства изометрической эквивалентности (4) отметим, что $K_{x_0,\, y_0} = K_{\theta_1,\, \theta_2}$ и

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\theta) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\theta) \end{pmatrix} \in U_p. \tag{5}$$

Далее, замена переменных $x - \theta_1 = pu, y - \theta_2 = pv$, где $u, v \in O_p$ приводит ряд Тейлора $T_\theta f(x, y)$ к виду

$$T_\theta f(\theta_1 + pu, \theta_2 + pv) = f(\theta_1, \theta_2) + \sum_{s=2}^{\infty} p^s \Phi_s(u, v),$$

где $\Phi_s(u, v)$ – s-форма с целыми p-адическими коэффициентами.

Известно, что квадратичная форма $\Phi_2(u, v)$ с помощью некоторого линейного изометрического преобразования приводится к диагональному виду

$$\varepsilon_1 X^2 + \varepsilon_2 Y^2,$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – p-адические единицы.

Ряд $\sum p^s \Phi_s$ в этом случае сводится к ряду вида

$$F(X, Y) = \varepsilon_1 X^2 + \varepsilon_2 Y^2 + \sum_{s=3}^{\infty} p^s \Phi_s^*(X, Y),$$

где $\Phi_s^*(X, Y)$ – формы с целыми p-адическими коэффициентами.
Эти формы представимы в виде сумм

$$\Phi_s^*(X, Y) = X^2 F_{s-2}(X, Y) + Y^2 G_{s-2}(X, Y),$$

где F_{s-2}, G_{s-2} – формы порядка s-2.

Обозначим $A(X, Y) = \varepsilon_1^{-1} \sum_{s=3}^{\infty} p^{s-3} F_{s-2}(X, Y), B(X, Y) = \varepsilon_2^{-1} \sum_{s=3}^{\infty} p^{s-3} F_{s-2}(X, Y)$.
Тогда $F(X, Y) = \varepsilon_1 p^2 X^2 (1 + pA(X, Y)) + \varepsilon_2 p^2 Y^2 (1 + pB(X, Y))$.

Далее, по свойству p-адического аналога ряда Ньютона существуют также степенные ряды $D(X,Y)$ и $E(X,Y)$ с целыми p-адическими коэффициентами, сходящиеся в компакте $O_p \times O_p$, такие что

$$1 + pA(X, Y) = (1 + pD(X, Y))^2$$

$$1 + pB(X, Y) = (1 + pE(X, Y))^2.$$

Поэтому изометрическое преобразование

$$\begin{cases} X_* = X(1 + pD(X, Y)) \\ Y_* = Y(1 + pE(X, Y)) \end{cases}$$

приводит ряд $F(X,Y)$ к квадратичной форме вида

$$\varepsilon_1 p^2 X_{\bullet}^2 + \varepsilon_2 p^2 Y_{\bullet}^2 .$$

Второе утверждение доказано.

Следствие.

$$\sum_{x|p^\alpha}\sum_{y|p^\alpha}\exp\left(\frac{2\pi i}{p^\alpha}f(x,y)\right)=(-1)^{\left(\frac{p^\alpha-1}{2}\right)^2}\sum_{s=1}^{r}\left(\frac{2D_s}{p}\right)^\alpha p^\alpha \exp\left(\frac{2\pi i}{p^\alpha}f(\theta_s)\right),$$

где $\left\{\theta_i, i=\overline{1,r}\right\}$ – множество всех решений системы уравнений (3), принадлежащих $O_p \times O_p$ и ввиду (5)

$$D_s=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\theta_s) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\theta_s)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\theta_s) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\theta_s)\end{pmatrix}\in U_p, \alpha\geq 2.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Боревич З.И., Шафаревич И.Р.* Теория чисел. М.: Наука, 1964.

УДК 517.984

О. Ю. Дмитриев

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЕСЯТОГО ПОРЯДКА

На отрезке [0,1] рассмотрим краевую задачу

$$y^{(10)} - \lambda y = 0, \qquad (1)$$

$$U_i(y) = a_i y^{(i-1)}(0) + y^{(i-1)}(1) = 0, \quad i=\overline{1,10}, \qquad (2)$$

где a_i – константы и λ – спектральный параметр.

Пусть

$$b_j = \sum_{i=1}^{10} a_i(-\omega_j)^{i-1}, \quad j=\overline{1,10}. \qquad (3)$$

Как известно, краевые условия являются нерегулярными по Биркгофу [1, с. 66 – 67], если некоторые коэффициенты при экспонентах в разложении характеристического определителя $\Delta(\rho)$ обращаются в ноль. Однако количество нулевых коэффициентов влияет на экспоненциальный рост функции Грина $G(x,t,\lambda)$ и поэтому представляет интерес для исследования. Случаи, когда один коэффициент равен нулю, или около половины коэффициентов равны нулю, рассмотрены в статьях [2, 3]. Там же показана связь между b_j и определителями в разложении $\Delta(\rho)$. Если все b_j, кроме