2. *Дмитриев О.Ю.* Разложение по собственным функциям дифференциального оператора n-го порядка с нерегулярными краевыми условиями // Математика и ее приложения. Саратов, 1991. С. 70 – 72.

3. *Дмитриев О.Ю.* Разложение по собственным функциям дифференциального оператора n-го порядка с нерегулярными краевыми условиями // Современные проблемы теории функций и их приложения. Саратов, 1996. С. 41 – 42.

УДК 519.853

С. И. Дудов

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВНУТРЕННЕЙ ОЦЕНКЕ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА ШАРОМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НОРМЫ*

1. Пусть D – выпуклый телесный компакт из конечномерного действительного пространства R^p, а функция $n(x)$ удовлетворяет на R^p аксиомам нормы. Задачу о вложении в данный компакт D шара нормы $n(\cdot)$ максимального радиуса можно записать в виде

$$\rho_\Omega(x) \overset{df}{\equiv} \min_{y\in\Omega} n(x-y) \to \max_{x\in D}, \tag{1}$$

где $\Omega = \overline{R^p \setminus D}$. Эта, так называемая, задача о внутренней оценке компакта D шаром нормы $n(\cdot)$ рассматривалась в работе [1]. В ней получено необходимое и достаточное условие решения, доказана единственность решения для случая строго выпуклого компакта D, предложена схема алгоритма приближенного решения задачи для оценки произвольного выпуклого компакта.

Здесь мы рассмотрим вопрос об устойчивости решения задачи (1) относительно погрешности задания компакта D.

Приведем используемые далее обозначения, вспомогательные понятия и факты. Под $Kv(R^p)$ будем понимать пространство всех выпуклых компактов из R^p с метрикой $h(A,B) = \max\left\{\sup\limits_{a\in A}\inf\limits_{b\in B} n(a-b), \sup\limits_{b\in B}\inf\limits_{a\in A} n(a-b)\right\}$,
$G(x_0) = \{x\in R^p : \rho_\Omega(x) \ge \rho_\Omega(x_0)\}$, $G^c(x_0) = \{x\in R^p : \rho_\Omega(x) \le \rho_\Omega(x_0)\}$,
$o_p = (0,\ldots,0)\in R^p$, $\|\cdot\|$ – евклидова норма в R^p, $\rho(D) = \max\limits_{x\in D}\rho_\Omega(x)$,
$X(D) = \{y\in D : \rho_\Omega(y) = \rho(D)\}$, $A\overset{*}{-}B = \{c\in R^p : c+B\subset A\}$,

*Работа выполнена при поддержке программы «Ведущие научные школы», проект № 00-15-96123.

$Bn(x,r)=\{y\in R^p : n(x-y)\le r\}$, $B(x,r)=\{y\in R^p : \|x-y\|\le r\}$, $\operatorname{int} D$ – внутренность множества D.

ЛЕММА 1 [2]. Если $\rho_\Omega(y)\ge\rho_\Omega(x)$, то $\rho_\Omega(y)=\rho_{G^c(x)}(y)+\rho_\Omega(x)$.

Нетрудно показать, что имеет место

ЛЕММА 2. Если $\rho_\Omega(x_0)>0$, то справедливо представление

$$G(x_0)=D\overset{*}{-}Bn(o_p,\rho_\Omega(x_0)).$$

Определение 1 [3]. Множество $A\subset R^p$ называется r*-сильно выпуклым* множеством, если оно может быть представлено как пересечение евклидовых замкнутых шаров радиуса r.

Определение 2 [3]. Пусть $A\subset R^p$ – ограниченное множество, а числа $\rho>0$ и $r>0$ такие, что $B(o_p,\rho)\overset{*}{-}A\ne\varnothing$ и $r\ge\rho$. *Сильно выпуклой* r*-оболочкой* множества A называется пересечение всех замкнутых евклидовых шаров радиуса r, содержащих данное множество A. Будем ее обозначать $str\ co_r A$.

ЛЕММА 3 [3]. Если $A\subset R^p$ – r-сильно выпуклое множество, то множество $A\overset{*}{-}B$, если оно не пусто, также r-сильно выпукло.

ЛЕММА 4 [3]. Пусть $r>0$, а точки a_0 и a_1 из R^p таковы, что $0<\|a_0-a_1\|<2r$. Тогда справедливо представление

$$str\ co_r\{a_0,a_1\}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}B(a_\alpha,r_\alpha),$$

где $a_\alpha=(1-\alpha)a_0+\alpha a_1$, $r_\alpha=r-\sqrt{r^2-\alpha(1-\alpha)\|a_0-a_1\|^2}$.

2. Пусть $\varepsilon>0$ – погрешность задания компакта $D\in Kv(R^p)$ компактом $D_\varepsilon\in Kv(R^p)$, то есть

$$h(D,D_\varepsilon)\le\varepsilon, \tag{2}$$

а C_0 – положительная константа (она существует в силу эквивалентности норм в R^p), для которой

$$\|x\|\le C_0 n(x),\quad \forall\ x\in R^p. \tag{3}$$

ТЕОРЕМА. Имеет место неравенство

$$|\rho(D)-\rho(D_\varepsilon)|\le\varepsilon. \tag{4}$$

Кроме того, если D – r-сильно выпуклое множество, а $\varepsilon\in\left(0,\dfrac{r}{C_0}\right)$ и достаточно мало, чтобы $X(D_\varepsilon)\subset\operatorname{int}D$, то

$$\|x^*-x_\varepsilon\|\le4\sqrt{C_0\varepsilon(r-C_0\varepsilon)},\ \forall\ x_\varepsilon\in X(D_\varepsilon), \tag{5}$$

где x^* – единственное решение задачи (1).

Доказательство. Легко показать, что из (2) для любого $x \in R^p$ следует оценка

$$|\rho_\Omega(x) - \rho_{\Omega_\varepsilon}(x)| \le \varepsilon, \qquad \Omega_\varepsilon = \overline{R^p \setminus D_\varepsilon}, \tag{6}$$

пользуясь которой уже нетрудно получить (4).

Пусть теперь D – r-сильно выпуклое множество. Тогда, как и для любого строго выпуклого компакта [1], задача (1) имеет единственное решение, то есть $X(D) = \{x^*\}$. Возьмем произвольный элемент $x_\varepsilon \in X(D_\varepsilon)$. Так как $\rho_\Omega(x^*) \ge \rho_\Omega(x_\varepsilon)$, то по лемме 1

$$\rho_\Omega(x^*) = \rho_{G^c(X_\varepsilon)}(x^*) + \rho_\Omega(x_\varepsilon). \tag{7}$$

Отсюда, учитывая что x^* – решение задачи (1), вытекает

$$\rho_{G^c(x_\varepsilon)}(x^*) = \max_{x \in G(x_\varepsilon)} \rho_{G^c(x_\varepsilon)}(x). \tag{8}$$

Поскольку $x_\varepsilon \in X(D_\varepsilon)$ и в соответствии с (6) выполняется $|\rho_\Omega(x_\varepsilon) - \rho_{\Omega_\varepsilon}(x_\varepsilon)| \le \varepsilon$, то из (7) следует $\rho_{G^c(x_\varepsilon)}(x^*) \le 2\varepsilon$. Поэтому, принимая во внимание (3) и (8), можно дать оценку сверху для максимального радиуса евклидова шара вложенного в $G(x_\varepsilon)$:

$$\max_{x \in G(x_\varepsilon)} \min_{y \in G^c(x_\varepsilon)} \|x - y\| \le 2\varepsilon C_0. \tag{9}$$

Из условия теоремы $X(D_\varepsilon) \subset \operatorname{int} D$ следует $\rho_\Omega(x_\varepsilon) > 0$. Тогда, применяя леммы 2 и 3, заключаем, что множество $G(x_\varepsilon)$ является r-сильно выпуклым. Поскольку $x^* \in G(x_\varepsilon)$ и $x_\varepsilon \in G(x_\varepsilon)$, то [3]

$$str\, co_r \left\{ x^*, x_\varepsilon \right\} \subset G(x_\varepsilon). \tag{10}$$

Из леммы 4 легко сделать вывод, что максимальный радиус евклидова шара, вложенного в множество $str\, co_r \left\{ x^*, x_\varepsilon \right\}$, равен $r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}\|x^* - x_\varepsilon\|^2}$. Поэтому, учитывая (9) – (10), получаем неравенство

$$r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}\|x^* - x_\varepsilon\|^2} \le 2C_0\varepsilon,$$

очевидное преобразование которого и дает (5). Теорема доказана.

Замечание. Один из способов получения приближенного решения задачи (1) может заключаться в следующем. Можно задать сетку векторов на единичной евклидовой сфере пространства R^p с центром в o_p и построить опорные гиперплоскости к компакту D, для которых эти вектора являются нормалями. Результаты работы [3] позволяют в зависимости от «мелкости» этой сетки дать оценку погрешности аппроксимации компакта D многогранником, который образуют построенные гиперплоскости. Далее, решив соответствующую задачу о внутренней оценке построенного многогранника, которая сводится к задаче линейного программирования [1], мы, используя оценку погрешности аппроксимации выпуклого компакта D многогранником и теорему 1, имеем возможность оценить погрешность полученного приближенного решения задачи (1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Дудов С.И.* Внутренняя оценка выпуклого множества телом нормы // ЖВМ и МФ. 1996. Т. 36. № 5. С. 153 –159.

2. *Дудов С.И.* Об обобщенном градиенте функции расстояния // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Темат. обзоры. 1999. Т. 61(2). Негладкий анализ и оптимизация. С. 5 – 14.

3. *Половинкин Е.С.* Сильно выпуклый анализ // Мат. сб. 1996. Т. 187. № 2. С. 102 – 130.

УДК 519.853.3

И. В. Златорунская

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ*

1. Пусть D заданный выпуклый компакт из R^p, функция $n(x)$ удовлетворяет аксиомам нормы на R^p, $\rho(A,B)=\sup\limits_{x\in A}\inf\limits_{y\in B} n(x-y)$ – уклонение множества A от множества B, $h(A,B)=\max\{\rho(A,B),\rho(B,A)\}$ – расстояние Хаусдорфа между множествами A и B в норме $n(x)$, $Bn(x,r)=\{y\in R^p: n(x-y)\le r\}$ – шар в норме $n(x)$ с центром в точке x и радиусом r. Тогда задачу о наилучшем приближении выпуклого компакта D шаром нормы $n(x)$ в метрике Хаусдорфа, порожденной этой нормой, можно записать в виде

$$h(D,Bn(x,r)) \to \min_{x\in R^p,\, r\ge 0}. \tag{1}$$

Свойства решения этой задачи изучались в [1] для случая евклидовой нормы и в [2] для произвольной нормы $n(x)$.

В данной статье мы рассмотрим вопрос о погрешности решения задачи (1) при аппроксимации компакта D многогранником, а именно оценим разность $|h_0(D)-h_0(D_c)|$, где $h_0(D)=\min\limits_{x\in R^p,\, r>0} h(D,Bn(x,r))$, D_c – многогранник, аппроксимирующий компакт D.

* Работа выполнена при поддержке программы «Ведущие научные школы», проект № 00-15-96123.