многогранника, которая сводится к задаче линейного программирования [1], мы, используя оценку погрешности аппроксимации выпуклого компакта D многогранником и теорему 1, имеем возможность оценить погрешность полученного приближенного решения задачи (1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Дудов С.И.* Внутренняя оценка выпуклого множества телом нормы // ЖВМ и МФ. 1996. Т. 36. № 5. С. 153 –159.

2. *Дудов С.И.* Об обобщенном градиенте функции расстояния // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Темат. обзоры. 1999. Т. 61(2). Негладкий анализ и оптимизация. С. 5 – 14.

3. *Половинкин Е.С.* Сильно выпуклый анализ // Мат. сб. 1996. Т. 187. № 2. С. 102 – 130.

УДК 519.853.3

И. В. Златорунская

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ*

1. Пусть D заданный выпуклый компакт из R^p, функция $n(x)$ удовлетворяет аксиомам нормы на R^p, $\rho(A,B) = \sup\limits_{x\in A} \inf\limits_{y\in B} n(x-y)$ – уклонение множества A от множества B, $h(A,B) = \max\{\rho(A,B), \rho(B,A)\}$ – расстояние Хаусдорфа между множествами A и B в норме $n(x)$, $Bn(x,r) = \{y \in R^p : n(x-y) \le r\}$ – шар в норме $n(x)$ с центром в точке x и радиусом r. Тогда задачу о наилучшем приближении выпуклого компакта D шаром нормы $n(x)$ в метрике Хаусдорфа, порожденной этой нормой, можно записать в виде

$$h(D, Bn(x,r)) \to \min_{x\in R^p,\, r\ge 0}. \tag{1}$$

Свойства решения этой задачи изучались в [1] для случая евклидовой нормы и в [2] для произвольной нормы $n(x)$.

В данной статье мы рассмотрим вопрос о погрешности решения задачи (1) при аппроксимации компакта D многогранником, а именно оценим разность $|h_0(D) - h_0(D_c)|$, где $h_0(D) = \min\limits_{x\in R^p,\, r>0} h(D, Bn(x,r))$, D_c – многогранник, аппроксимирующий компакт D.

* Работа выполнена при поддержке программы «Ведущие научные школы», проект № 00-15-96123.

2. Пусть оцениваемый компакт D задан своей опорной функцией $W(D,x)=\max\limits_{y\in D}\langle x,y\rangle$. Для построения многогранника, аппроксимирующего компакт D, можно воспользоваться результатами работы [3], которые, в частности, позволяют строить внешние (по включению) аппроксимации выпуклых множеств многогранниками и оценивать погрешность этой аппроксимации. Приведем два определения.

Определение 1 [3]. Сеткой C мелкости $\Delta\in(0,1)$ называется конечный набор точек $x_i\in R^p$, $i\in\overline{1,I}$, из единичной сферы $S(0_p,1)=\{x\in R^p:\|x\|=1\}$ такой, что для любого $x\neq 0_p$ существует подмножество индексов $I_x\subset\overline{1,I}$ и числа $\alpha_i>0$, где $i\in I_x$, такие, что

$$\|x_i-x_j\|<\Delta,\quad \forall\, i,j\in I_x,\quad x_i,x_j\in C,$$
$$x=\sum_{i\in I_x}\alpha_i x_i,\quad x_i\in C.$$

Определение 2 [3]. Пусть задана сетка C мелкости $\Delta\in(0,1)$. На множестве положительно однородных функций $f:R^p\to R$ зададим сеточный оператор $\aleph$ по формуле

$$\aleph f(x)=\begin{cases} f(x), & x/\|x\|\in C,\\ +\infty, & x/\|x\|\notin C.\end{cases}$$

Как показано в работе [3] оператор $\aleph$ задает внешнюю многогранную аппроксимацию выпуклого компакта по сетке C. При этом

$$co\,\aleph W(D,x)=W(D_c,x),$$

где многогранник D_c, содержащий компакт D, образован опорными к D гиперплоскостями с нормалями $x_i\in C$, $i=\overline{1,I}$ и имеет вид

$$D_c=\{y\in R^p:\langle -x_i,y\rangle+W(D,x_i)\geq 0,\ x_i\in C,\ i=\overline{1,I}\}.$$

Используя результаты работы [3] и свойства опорных функций, нетрудно показать, что имеет место

ЛЕММА 1. Пусть D выпуклый компакт, тогда

$$|W(D,x)-W(D_c,x)|\leq 4(diam\,D)^2\Delta\|x\|/\rho,$$

где $diam\,D=\max\limits_{x_1,x_2\in D} n(x_1-x_2)$ – диаметр множества D, $\rho=\max\limits_{x\in D}\ \min\limits_{y\in R^p\setminus D}\|x-y\|$ – радиус наибольшего евклидова шара, содержащегося в D.

3. Лемма 1 дает возможность получить оценку погрешности приближенного решения задачи (1).

ТЕОРЕМА 1. Справедлива оценка

$$|h_0(D)-h_0(D_c)|\leq 4(diam\,D)^2\Delta K/\rho,$$

где константы $diam\, D$, ρ определены в лемме 1, а константа K определяется для полярной нормы $n^*(x) = \max\limits_{n(v)\le 1} \langle v, x\rangle$ соотношением $\|x\| \le K\, n^*(x)$, $\forall x \in R^p$.

Доказательство. Уклонение компакта D от многогранника D_c в произвольной норме $n(\cdot)$ можно выразить следующим образом [4]

$$\rho(D, D_c) = \max_{n^*(x)=1} \{W(D, x) - W(D_c, x)\}.$$

Тогда расстояние Хаусдорфа между множествами D и D_c выражается формулой

$$h(D, D_c) = \max_{n^*(x)=1} |W(D, x) - W(D_c, x)|. \tag{2}$$

Используя липшицевость функции $h_0(D)$, доказанную в статье [2], лемму 1 и соотношение (2), получаем

$$|h_0(D) - h_0(D_c)| \le h(D, D_c) \le \max_{n^*(x)=1} (4(diam\, D)^2 \Delta \|x\| / \rho).$$

Поскольку по условию выполняется неравенство $\|x\| \le K\, n^*(x)$, то, следовательно,

$$|h_0(D) - h_0(D_c)| \le 4(diam\; D)^2 \Delta K / \rho.$$

Таким образом, погрешность приближенного решения задачи (1) при аппроксимации компакта D многогранником пропорциональна мелкости сетки C, по которой строится внешняя многогранная оценка множества D и обратно пропорциональна радиусу наибольшего шара, вложенного в D.

Если компакт D является сильно выпуклым множеством [3], то можно получить более точную (по порядку мелкости сетки C) оценку погрешности, а именно имеет место

ТЕОРЕМА 2. Если компакт D является сильно выпуклым множеством с радиусом R_0, то справедлива следующая оценка

$$| h_0(D) - h_0(D_c) | \le 2R_0 \Delta^2 / \rho.$$

Замечание. Если шар используемой нормы $n(\cdot)$ является многогранником, то задача (1) для многогранника D_c сводится к задаче линейного программирования [5]. Решив задачу линейного программирования и воспользовавшись теоремой 1 или 2, можно оценить погрешность полученного приближенного решения задачи (1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Никольский М.С., Силин Д.Б.* О наилучшем приближении выпуклого компакта элементами аддиала // Тр. МИ РАН. 1995. Т. 211. С. 338 –354.

2. *Дудов С.И., Златорунская И.В.* Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 10. С. 13 – 38.

3. *Половинкин Е.С.* Сильно выпуклый анализ // Мат. сб. 1996. Т. 187, № 2. С. 102 – 130.

4. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
5. *Дудов С.И., Златорунская И.В.* Алгоритм наилучшего приближения выпуклого компакта шаром произвольной нормы // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 43 – 46.

УДК 681.3.068

В. А. Иванов, С. П. Шевырёв

ГЕНЕРАТОР ТЕСТОВ

В статье рассматривается задача построения универсального генератора тестов. Работа развивает идеи, изложенные в [1 – 5].

Математически тест, созданный таким генератором, представляет собой нагруженный ориентированный граф, вершинами которого являются вопросы одного из трёх видов:

1. Выбрать один вариант из нескольких.
2. Отметить несколько пунктов в списке ответов.
3. Ввести строку с последующим сравнением с ответом в списке ответов.

Дугами ориентированного графа являются пути перехода от одного вопроса теста к другому.

Второй, глубинный уровень модели генератора тестов предоставляет совокупность трёх модулей: тестируемого, преподавателя и администратора. Модуль администратора обеспечивает учет пользователей системы. Модуль тестируемого предоставляет собой интерфейс пользователя для прохождения тестирования, заносит результаты тестирования в базу данных. Модуль преподавателя, в свою очередь, представляет собой инструмент для создания вопросов, тестов, а также просмотра результатов тестирования.

Между модулями существуют связи, определяющие потоки информации в системе. Так, например, через модуль администратора в систему попадает информация о том, какие пользователи относятся к преподавателям, а какие – к тестируемым. Между модулем тестируемого и модулем преподавателя существует двунаправленная связь – результат работы модуля преподавателя есть входная информация для модуля тестирования. Модуль преподавателя предоставляет сформированные тесты тестирующему модулю и обрабатывает результаты, поступающие в систему после окончания тестирования. В свою очередь, модуль тестирования формирует данные (результаты прохождения тестов), необходимые модулю преподавателя. Далее перечислим все основные процессы, протекающие в системе тестирования при её работе.

Модуль администратора. Процесс 1. Управляет базой данных пользователей системы, включает в себя операции добавления, удаления