УДК 514.764

И. П. Иванченко

О ЛОКАЛЬНОМ ИЗОМЕТРИЧЕСКОМ ВЛОЖЕНИИ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ДРУГ В ДРУГА

В статье получены некоторые необходимые условия для существования локальных изометрических вложений одного риманова пространства в другое.

Пусть N – $(n+p)$-мерное риманово многообразие с тензором римановой кривизны R', а M – n-мерное многообразие локально изометрически вложенное в N. Отображение вложения индуцирует риманову связность в M и вторую основную форму $\alpha : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)^{\perp}$ [1]. Форма α симметрична и билинейна и в каждой точке $x \in M$ индуцирует симметричное билинейное отображение $\alpha_x : T(M) \times T(M) \to T(M)^{\perp}$. Связь между тензорами кривизны на N и M задается так:

$$R'(W,Z,X,Y) = R(W,Z,X,Y) + <\alpha(X,Z),\alpha(Y,W)> - <\alpha(Y,Z),\alpha(X,W)>,$$

где X, Y, Z, W – произвольные касательные к M векторы, а $< , >$ – скалярное произведение, определяемое римановой метрикой на N. В частности, в двумерном направлении, определяемом векторами X, Y, касательными к M,

$$R(X,Y,X,Y) - R'(X,Y,X,Y) = <\alpha(X,X),\alpha(Y,Y)> - <\alpha(X,Y),\alpha(X,Y)>. \quad (1)$$

Это уравнение будем называть уравнением Гаусса для подмногообразия. Для дальнейших рассуждений применим алгебраический результат Оцуки.

ТЕОРЕМА (Оцуки) [2]. Пусть $\alpha : L \times L \to E$ – билинейная симметричная форма на n-мерном линейном пространстве, E – $(n+p)$-мерное евклидового линейное пространство со скалярным произведением $< , >$. Тогда, если $p < n$ и для любых $X, Y \in L$ выполняется условие

$$<\alpha(X,X),\alpha(Y,Y)> - <\alpha(X,Y),\alpha(X,Y)> \le 0, \quad (2)$$

то существует такой ненулевой вектор $Z \in L$, что $\alpha(Z,Z) = 0$.

Из уравнения Гаусса (1) и теоремы Оцуки вытекает следующее утверждение, которое является нашей основной теоремой.

ТЕОРЕМА 1. Если в каждой точке n-мерного риманова пространства M значения кривизны в каждом двумерном направлении ограничены сверху постоянной C и в окрестности некоторой точки $(n+p)$-мерного риманова пространства N значения кривизны в каждом двумерном направлении больше C, то локальное изометрическое вложение M в N невозможно при условии $p < n-1$.

Доказательство. Условие теоремы означает, что левые части уравнений Гаусса (2) принимают отрицательные значения для любой пары линейно независимых векторов X,Y касательных к M. Тогда для билинейной симметричной формы α выполняется условие теоремы Оцуки, и существует ненулевой касательный к M вектор Z такой, что $\alpha(Z,Z)=0$. Допустим, что вложение M в N существует. Так как коразмерность равна p, мы можем локально выбрать p полей единичных нормальных векторов $\xi_1,\dots,\xi_p$, которые ортогональны в каждой точке. Тогда можем выразить α так: $\alpha(X,Y)=\sum_{i=1}^{p}B^i(X,Y)\xi_i$, и существует ненулевой вектор Z такой, что для любого $i=1,\dots,p$ $B^i(Z,Z)=0$.

Рассмотрим систему уравнений $B^i(Z,W)=0$. У этой системы в силу того, что $p<n-1$, существует хотя бы одно ненулевое решение W такое, что векторы Z и W линейно не зависимы. Но тогда на паре этих векторов Z,W правая часть уравнения (1) обратится в ноль. Это означает, что в двумерном направлении, задаваемом векторами Z, W условие Гаусса не выполняется. Следовательно, локального изометрического вложения M в N не существует.

Если в теореме 1 предположить, что пространства M и N являются римановыми пространствами постоянной кривизны k_1 и k_2 соответственно, то легко получим известную теорему Картана [3] о невозможности изометрического вложения M в N при $k_1<k_2$ и $p<n-1$.

Теперь предположим, что N есть $(n+p)$-мерное пространство постоянной кривизны k. Тензор римановой кривизны этого пространства удовлетворяет условию

$$R(X,Y,X,Y)=k(<X,X><Y,Y>-<X,Y>^2), \tag{3}$$

где X,Y – произвольные касательные векторы к N. Если же рассматривать только те касательные векторы, которые являются единичными и попарно ортогональными, то значение тензора кривизны на таких векторах в каждой точке есть постоянная k. И пусть пространство M является кэлеровым пространством размерности $n=2m$ постоянной секционной голоморфной кривизны c. Напомним, что на M задано почти комплексная структура J и эрмитова метрика этого пространства удовлетворяет условию $<JX,JY>=<X,Y>$ для любых X,Y из касательного пространства к M. Тензор римановой кривизны этого многообразия принимает постоянные значения c на двумерных направлениях, инвариантных относительно комплексной структуры: $R(X,JX,X,JX)=c$ для любых единичных векторов в касательном пространстве к M. Если же π – произвольная плоскость в касательном пространстве к M, причем угол между π и $J(\pi)$ равен $\varphi(\pi)$, тензор римановой кривизны принимает на единичных взаимно ортогональных векторах $X, Y \in \pi$ значения

$$R(X,Y,X,Y)=\frac{c}{4}(1+3\cos^2\varphi(\pi)). \tag{4}$$

Далее будем рассматривать кэлерово пространство M как риманово пространство, и под изометрическим вложением понимать вложение M в N как римановых многообразий.

ТЕОРЕМА 2. В $(2m+p)$-мерное пространство постоянной кривизны k нельзя локально изометрически вложить $2m$-мерное пространство постоянной нулевой или положительной голоморфной секционной кривизны c при $c<k$ и $p<2m-1$.

Доказательство. В этом случае уравнения Гаусса примут вид

$$\frac{c}{4}(1+3\cos^2\alpha(p))-k=<\alpha(X,X),\alpha(Y,Y)> - <\alpha(X,Y),\alpha(X,Y)>, \tag{5}$$

где X, Y – попарно ортогональные единичные векторы.

При $c \geq 0$ из этого равенства следует, что

$$<\alpha(X,X),\alpha(Y,Y)> - <\alpha(X,Y),\alpha(X,Y)> \leq c-k,$$

а значит, если $c<k$, выполняется условие теоремы Оцуки. Откуда следует справедливость нашего утверждения.

Доказательства следующих теорем аналогичны и вытекают из уравнений Гаусса в каждом из этих частных случаев.

ТЕОРЕМА 3. В $(2m+p)$-мерное пространство постоянной кривизны нельзя локально изометрически вложить $2m$-мерное пространство постоянной отрицательной голоморфной секционной кривизны c при $c<4k$, $p<2m-1$.

ТЕОРЕМА 4. В $2m$-мерное риманово пространство постоянной нулевой или положительной голоморфной секционной кривизны c нельзя вложить n-мерное риманово пространство постоянной кривизны k, если $k \leq c$ и $n>m$.

ТЕОРЕМА 5. В $2m$-мерное риманово пространство постоянной отрицательной голоморфной секционной кривизны c нельзя вложить n-мерное риманово пространство постоянной кривизны k, если $k \leq \frac{c}{4}$ и $n>m$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть M – риманово пространство постоянной голоморфной секционной кривизны c_2 размерности $2n$, N – риманово пространство постоянной голоморфной секционной кривизны c_1 размерности

$2m$, причем $m \le 2n-1$. Тогда вложение M в N невозможно при: 1) $c_1 \ge 0, c_2 \le 0$; 2) $c_1 < 0, c_2 < 0$ и $c_2 \le 4c$; 3) $c_1 > 0, c_2 > 0$ и $c_2 \le \frac{c}{4}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии: В 2 т. М.: Наука, 1981. Т.2.
2. *Otsuki T.* On the existence of solutions of a system of quadratic equations and its geometrical applications // Proc. of Japan Acad. 1953. Vol. 29. P. 99 – 100.
3. *Cartan E.* Sur les varietes de courbure conctante d`un espace euclidien ou non-euclidien // Bull. Soc. Math. France 1919. Vol. 47. P. 125 – 160, 1920. Vol. 48. P. 132 – 208.

УДК 519.4

С. И. Ишина

ОБ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПРОЕКТИВНО-ПЛАНАРНЫХ АВТОМАТОВ ПОЛУГРУППАМИ ИХ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ*

В настоящей статье рассматривается задача об определяемости универсальных проективно-планарных автоматов (сокращенно P-планарных автоматов) полугруппами их входных сигналов.

Под P-планарным автоматом понимается полугрупповой автомат без выходных сигналов $A=(X,\Gamma,\delta)$ с множеством состояний X, наделенным структурой проективной плоскости, полугруппой входных сигналов Γ и функцией переходов δ. Важным примером P-планарных автоматов является так называемый универсальный [1] P-планарный автомат, обозначаемый $\mathrm{Atm}\Pi=(\Pi, \mathrm{End}\Pi, \delta)$, где $\delta(x,\varphi)=\varphi(x)$ для $x \in X$, $\varphi \in \mathrm{End}\Pi$. Таким автоматам в статье уделяется главное внимание, так как для всякого P-планарного автомата $A=(\Pi, \Gamma, \delta)$ существует, и притом, единственный гомоморфизм по входным сигналам этого автомата в автомат $\mathrm{Atm}\Pi$.

Для описания на языке узкого исчисления предикатов (УИП) свойств P-планарного автомата будем рассматривать такой автомат в виде трехсортной алгебраической системы $A=((X,L,\in), \Gamma, \delta)$ с тремя основными множествами X, L, Γ и сигнатурой $\Omega=\{\in,\delta,\times\}$, где X и L – множества точек и прямых проективной плоскости, Γ – множество входных сигналов автомата A, $\in$ – символ бинарного отношения принадлежности точек проективной плоскости её прямым, δ – символ бинарной операции функции переходов автомата и $\times$ – символ бинарной операции умножения полугруппы Γ.

---

* Работа выполнена при поддержке INTAS, грант № 99-1224.