$2m$, причем $m \le 2n-1$. Тогда вложение M в N невозможно при: 1) $c_1 \ge 0, c_2 \le 0$; 2) $c_1 < 0, c_2 < 0$ и $c_2 \le 4c$; 3) $c_1 > 0, c_2 > 0$ и $c_2 \le \frac{c}{4}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии: В 2 т. М.: Наука, 1981. Т.2.
2. *Otsuki T.* On the existence of solutions of a system of quadratic equations and its geometrical applications // Proc. of Japan Acad. 1953. Vol. 29. P. 99 – 100.
3. *Cartan E.* Sur les varietes de courbure conctante d'un espace euclidien ou non-euclidien // Bull. Soc. Math. France 1919. Vol. 47. P. 125 – 160, 1920. Vol. 48. P. 132 – 208.

УДК 519.4

С. И. Ишина

ОБ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПРОЕКТИВНО-ПЛАНАРНЫХ АВТОМАТОВ ПОЛУГРУППАМИ ИХ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ*

В настоящей статье рассматривается задача об определяемости универсальных проективно-планарных автоматов (сокращенно P-планарных автоматов) полугруппами их входных сигналов.

Под P-планарным автоматом понимается полугрупповой автомат без выходных сигналов $A=(X,\Gamma,\delta)$ с множеством состояний X, наделенным структурой проективной плоскости, полугруппой входных сигналов Γ и функцией переходов δ. Важным примером P-планарных автоматов является так называемый универсальный [1] P-планарный автомат, обозначаемый $\mathrm{Atm}\Pi=(\Pi, \mathrm{End}\Pi, \delta)$, где $\delta(x,\varphi)=\varphi(x)$ для $x\in X$, $\varphi\in \mathrm{End}\Pi$. Таким автоматам в статье уделяется главное внимание, так как для всякого P-планарного автомата $A=(\Pi, \Gamma, \delta)$ существует, и притом, единственный гомоморфизм по входным сигналам этого автомата в автомат $\mathrm{Atm}\Pi$.

Для описания на языке узкого исчисления предикатов (УИП) свойств P-планарного автомата будем рассматривать такой автомат в виде трехсортной алгебраической системы $A=((X,L,\in), \Gamma, \delta)$ с тремя основными множествами X, L, Γ и сигнатурой $\Omega=\{\in,\delta,\times\}$, где X и L – множества точек и прямых проективной плоскости, Γ – множество входных сигналов автомата A, $\in$ – символ бинарного отношения принадлежности точек проективной плоскости её прямым, δ – символ бинарной операции функции переходов автомата и $\times$ – символ бинарной операции умножения полугруппы Γ.

---

* Работа выполнена при поддержке INTAS, грант № 99-1224.

Элементарная теория P-планарных автоматов определяется в стиле аксиоматики Гильберта геометрии плоскости с помощью языка $\mathbf{L_A}$ УИП с трехсортными переменными. Алфавит такого языка состоит:

1) из счетного множества индивидуальных переменных 1-го сорта для обозначения точек проективной плоскости;

2) из счетного множества индивидуальных переменных 2-го сорта для обозначения прямых проективной плоскости;

3) из счетного множества индивидуальных переменных 3-го сорта для обозначения входных сигналов автомата;

4) из двухместного предикатного символа $\in$ для обозначения отношения принадлежности точек проективной плоскости её прямым;

5) из двухместного функционального символа δ для обозначения функции переходов автомата;

6) из двухместного функционального символа $\times$ для обозначения операции умножения входных сигналов автомата;

7) из конечного множества логических и технических символов, таких как $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists, =$, (,).

Обычным образом [2] с помощью функциональных символов δ и $\times$ определяются термы трех сортов, и с помощью символа = и предикатного символа $\in$ определяются атомарные формулы языка $\mathbf{L_A}$. Затем с помощью атомарных формул по индукции [2] определяются формулы языка $\mathbf{L_A}$.

Интерпретируется язык $\mathbf{L_A}$ в P-планарном автомате A=(П, Г, δ), рассматриваемом как трехсортная алгебраическая система $A=((X,L,\in), \Gamma, \delta)$, с помощью тройки отображений (f_1,f_2,f_3), которые отображают множества индивидуальных переменных 1, 2 и 3-го сортов в множества X, L и Г соответственно. Предикатный символ $\in$ интерпретируется как отношение принадлежности точек проективной плоскости её прямым. Функциональный символ δ интерпретируется как функция переходов автомата. Функциональный символ $\times$ интерпретируется как умножение элементов полугруппы Г. Остальным (техническим и логическим) символам языка $\mathbf{L_A}$ придается их обычное значение. Также обычным образом (по индукции) определяется истинностное значение формул этого языка. В результате каждая формула языка $\mathbf{L_A}$ образует утверждение (истинное или ложное) о P-планарном автомате A=(П, Г, δ).

Формула Ф языка $\mathbf{L_A}$ истинна на P-планарном автомате A, если при любой интерпретации этого языка в автомате A она образует истинное утверждение об этом автомате.

Основной результат статьи показывает, что класс всех универсальных P-планарных автоматов относительно элементарно определим [2] в классе всех полугрупп Г.

ТЕОРЕМА 1. Существуют такие формулы

$$C(x),\ L(\bar{x}),\ Eqv(\bar{x},\bar{y}),\ Ins(x,\bar{y})$$

языка $\mathbf{L_S}$ элементарной теории полугрупп (где $\bar{x}=(x_1,x_2)$, $\bar{y}=(y_1,y_2)$), что для любого универсального P-планарного автомата с множеством состояний $\Pi=(X,L)$ полугруппа входных сигналов $\Gamma=\mathrm{End}\Pi$ удовлетворяет следующим условиям:

1) множества $\bar{X}=\{x\in\Gamma: C(x)\}$ и $\bar{L}=\{\bar{x}\in\Gamma^2: L(\bar{x})\}$ не пусты;

2) формула $Eqv(\bar{x},\bar{y})$ задает отношение эквивалентности ε на множестве $\bar{L}$;

3) формула $Ins(x,\ \bar{y})$ задает бинарное отношение ρ между элементами множеств $\bar{X}$ и $\bar{L}$, которое согласовано с эквивалентностью ε по следующей формуле:

$$(x,\ \bar{x})\in\rho\wedge\bar{x}\equiv\bar{y}\ (\varepsilon)\Rightarrow(x,\ \bar{y})\in\rho;$$

4) проективная плоскость $\Pi=(X,L,\in)$ изоморфна трехсортной алгебраической системе $\bar{\Pi}=(\bar{X},\bar{L}/\varepsilon,\ \mu)$ с бинарным отношением $\mu\subset\bar{X}\times\bar{L}/\varepsilon$, которое для элементов $x\in\bar{X}$, $Y\in\bar{L}/\varepsilon$ определяется по формуле

$$(x,\ Y)\in\mu\Leftrightarrow(x,\ \bar{x})\in\rho \text{ при любых } \bar{x}\in Y;$$

5) для любой формулы Ψ языка $\mathbf{L_A}$ эффективно строится такая формула Φ языка $\mathbf{L_S}$, что Ψ в том и только в том случае истинна на универсальном P-планарном автомате A, если формула Φ истинна на его полугруппе входных сигналов, т. е. выполняется условие

$$\mathrm{A}\models\Psi\Leftrightarrow\Gamma\models\Phi.$$

Данная теорема позволяет решить следующие задачи:

ТЕОРЕМА 2. Универсальные P-планарные автоматы $A_1=(\Pi_1,\mathrm{End}\Pi_1,\delta_1)$ и $A_2=(\Pi_2,\mathrm{End}\Pi_2,\delta_2)$ совпадают тогда и только тогда, когда совпадают полугруппы их входных сигналов.

ТЕОРЕМА 3. Универсальные P-планарные автоматы $A_1=(\Pi_1,\mathrm{End}\Pi_1,\delta_1)$ и $A_2=(\Pi_2,\mathrm{End}\Pi_2,\delta_2)$ изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны полугруппы их входных сигналов.

ТЕОРЕМА 4. Если для универсальных P-планарных автоматов $A_1=(\Pi_1,\mathrm{End}\Pi_1,\delta_1)$ и $A_2=(\Pi_2,\mathrm{End}\Pi_2,\delta_2)$ полугруппы их входных сигналов элементарно эквивалентны, то сами автоматы A_1 и A_2 также элементарно эквивалентны.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Плоткин Б.И., Гринглаз Л.Я., Гварамия А.А.* Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высшая школа, 1994.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Плоткин Б.И., Гринглаз Л.Я., Гварамия А.А.* Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высшая школа, 1994.

2. *Ершов Ю.Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.

УДК 519.21

С. И. Козлова, В. Н. Михайлов

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ ОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

1. Рассмотрим однородную цепь Маркова с конечным числом состояний n и матрицей перехода вероятностей $P=\{p_{ij}\}$, $i,j=\overline{1,n}$, где $p_{ij}\ge 0$ – вероятность перехода из состояния i в состояние j, и

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}=1.$$

Пусть $x_i(k)$ – вероятность перехода за k шагов из начального состояния в состояние i, $\bar{x}(k)$ – вектор-столбец с компонентами $x_i(k)\ge 0$. Для известного начального распределения вероятностей $\bar{x}(0)$ вектор $\bar{x}(k)$ при любом k можно вычислить с помощью рекуррентного соотношения [1]

$$\bar{x}(k+1)=P^T\bar{x}(k),\ k=0,1,2,\ldots, \tag{1}$$

P^T – матрица, транспонированная к P. Пусть $\bar{a}$ – некоторый n-мерный вектор-столбец, а $\bar{e}$ – n-мерный вектор, компоненты которого равны 1. Запишем (1) в эквивалентной форме

$$\bar{x}(k+1)=\left(P^T-\bar{a}\bar{e}^T\right)\bar{x}(k)+\bar{a}\bar{e}^T\bar{x}(k).$$

Так как $\bar{e}^T\bar{x}(k)=x_1(k)+x_2(k)+\cdots+x_n(k)=1$, то

$$\bar{x}(k+1)=B\bar{x}(k)+\bar{a}, \qquad B=P^T-\bar{a}\bar{e}^T. \tag{2}$$

Применяя (2) при $k=0,1,2,\ldots$, получаем

$$\bar{x}(k+1)=B^{k+1}\bar{x}(0)+\left(B^k+B^{k-1}+\cdots+E\right)\bar{a}, \tag{3}$$

где E – единичная матрица.

Цепь Маркова называется *эргодической*, если $\bar{x}(k)\to\bar{x}$ при $k\to\infty$ для любого начального распределения вероятностей состояний $\bar{x}(0)$; век-