БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Плоткин Б.И., Гринглаз Л.Я., Гварамия А.А.* Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высшая школа, 1994.

2. *Ершов Ю.Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.

УДК 519.21

С. И. Козлова, В. Н. Михайлов

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ ОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

1. Рассмотрим однородную цепь Маркова с конечным числом состояний n и матрицей перехода вероятностей $P=\{p_{ij}\}$, $i,j=\overline{1,n}$, где $p_{ij}\geq 0$ – вероятность перехода из состояния i в состояние j, и

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}=1.$$

Пусть $x_i(k)$ – вероятность перехода за k шагов из начального состояния в состояние i, $\bar{x}(k)$ – вектор-столбец с компонентами $x_i(k)\geq 0$. Для известного начального распределения вероятностей $\bar{x}(0)$ вектор $\bar{x}(k)$ при любом k можно вычислить с помощью рекуррентного соотношения [1]

$$\bar{x}(k+1)=P^T\bar{x}(k),\ k=0,1,2,\ldots, \tag{1}$$

P^T – матрица, транспонированная к P. Пусть $\bar{a}$ – некоторый n-мерный вектор-столбец, а $\bar{e}$ – n-мерный вектор, компоненты которого равны 1. Запишем (1) в эквивалентной форме

$$\bar{x}(k+1)=\left(P^T-\bar{a}\bar{e}^T\right)\bar{x}(k)+\bar{a}\bar{e}^T\bar{x}(k).$$

Так как $\bar{e}^T\bar{x}(k)=x_1(k)+x_2(k)+\cdots+x_n(k)=1$, то

$$\bar{x}(k+1)=B\bar{x}(k)+\bar{a}, \qquad B=P^T-\bar{a}\bar{e}^T. \tag{2}$$

Применяя (2) при $k=0,1,2,\ldots$, получаем

$$\bar{x}(k+1)=B^{k+1}\bar{x}(0)+\left(B^k+B^{k-1}+\cdots+E\right)\bar{a}, \tag{3}$$

где E – единичная матрица.

Цепь Маркова называется *эргодической*, если $\bar{x}(k)\to\bar{x}$ при $k\to\infty$ для любого начального распределения вероятностей состояний $\bar{x}(0)$; вектор $\bar{x}$ предельного распределения вероятностей удовлетворяет однородной системе уравнений $P^T\bar{x}=\bar{x}$ [2].

ТЕОРЕМА 1. Для эргодичности цепи Маркова необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор $\bar{a}$ такой, что $B^k\to 0$ при $k\to\infty$.

Доказательство. Пусть цепь Маркова обладает свойством эргодичности, тогда существуют предельные вероятности $\bar{x}$; положим $\bar{a}=\bar{x}$. Имеем $B\bar{x}=P^T\bar{x}-\bar{x}\bar{e}^T\bar{x}=\bar{x}-\bar{x}=0$, поэтому согласно (3) $\bar{x}(k+1)=B^{k+1}\bar{x}(0)+\bar{x}$. Так как $\bar{x}(k+1)\to\bar{x}$ для любого начального распределения $\bar{x}(0)$, то $B^{k+1}\to 0$ при $k\to\infty$.

Если $B^k\to 0$ при $k\to\infty$ для данного вектора $\bar{a}$, то согласно теореме линейной алгебры [2] имеем при $k\to\infty$

$$E+B+B^2+\cdots+B^k\to(E-B)^{-1},$$

и из (3) следует $\bar{x}(k+1)\to(E-B)^{-1}\bar{a}$ для любого начального распределения вероятностей $\bar{x}(0)$, т.е. $\bar{x}=(E-B)^{-1}\bar{a}$ есть предельное распределение вероятностей. Определенный таким образом вектор $\bar{x}$ удовлетворяет уравнению $(E-B)\bar{x}=\bar{a}$, или $\bar{x}-\left(P^T-\bar{a}\bar{e}^T\right)\bar{x}=\bar{a}$. Так как $\bar{e}^T\bar{x}=1$, то $P^T\bar{x}=\bar{x}$, следовательно, $\bar{x}$ – вектор стационарного распределения вероятностей.

Следствие. Если существует такой вектор $\bar{a}$, что хотя бы одна из норм $\|B\|$ матрицы B удовлетворяет условию $\|B\|<1$, то рассматриваемая цепь Маркова является эргодической и предельные вероятности $\bar{x}$ удовлетворяют уравнению $(E-B)\bar{x}=\bar{a}$.

Это утверждение следует из того, что условие $\|B\|<1$ является достаточным для сходимости при $k\to\infty$. Заметим, что стационарное распределение $\bar{x}$ (собственный вектор матрицы P^T) находится из системы уравнений $(E-B)\bar{x}=\bar{a}$ с невырожденной матрицей коэффициентов. С помощью условия $\|B\|<1$ можно получить достаточные условия эргодичности цепи Маркова [3].

ТЕОРЕМА 2. Для эргодической цепи Маркова имеет место соотношение

$$\left(P^T\right)^k=B^k+S,\quad S=\bar{x}\bar{e}^T,\quad B=P^T-S. \tag{4}$$

Доказательство. Так как $\bar{e}^T\bar{x}=x_1+x_2+\cdots+x_n=1$, то

$$S^2=\left(\bar{x}\bar{e}^T\right)\left(\bar{x}\bar{e}^T\right)=S,$$

т.е. S – идемпотентная матрица. Для стохастической матрицы P имеем $P\bar{e}=\bar{e}$, поэтому $SP^T=\bar{x}\bar{e}^T P^T=\bar{x}\bar{e}^T=S$. Вследствие этого

$$SB=S\left(P^T-S\right)=SP^T-S^2=S-S=0 \text{ и } BS=\left(P^T-S\right)S=\left(P^T\bar{x}\right)\bar{e}^T-S=0.$$

Далее, $\left(P^T\right)^2=(B+S)(B+S)=B^2+SB+BS+S^2=B^2+S$. Утверждение теоремы верно для $k=1$. Пусть верно (4), тогда

$$\left(P^T\right)^{k+1}=\left(B^k+S\right)\left(B^k+S\right)=B^{k+1}+SB+B^{k-1}(BS)+S^2=B^{k+1}+S,$$

что и доказывает теорему.

Так как $B\bar{x}=P^T\bar{x}-\bar{x}\bar{e}^T\bar{x}=\bar{x}-\bar{x}=0$ для вектора $\bar{x}$ предельного распределения вероятностей, то при $\bar{a}=\bar{x}$ из (3) получаем

$$\bar{x}(k+1)=B^{k+1}\bar{x}(0)+\bar{x},$$

откуда следует

$$\left\|\bar{x}(k)-\bar{x}\right\|\le\left\|B^k\right\|\cdot\left\|\bar{x}(0)\right\|\le\alpha^k\left\|\bar{x}(0)\right\|,\quad \alpha=\|B\|,$$

оценка скорости сходимости вероятностей состояний эргодической цепи Маркова к предельным вероятностям.

2. Поставим в соответствие переходу системы из состояния i в состояние j за один шаг некоторый "доход" r_{ij}, который при фиксированном j не зависит от того, каким образом система пришла в состояние i, а зависит только от этого состояния i [4, 5]. Цепь Маркова порождает теперь последовательность доходов, соответствующих переходам из одного состояния в другое. Обозначим через $v_i(k)$ математическое ожидание суммарного дохода за k последующих шагов, если процесс начинается из состояния i. Обозначим

$$q_i=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}r_{ij},\quad i=\overline{1,n},\quad \bar{q}^T=(q_1,q_2,\dots q_n),\quad \bar{V}(k)=(v_1(k),v_2(k),\dots,v_n(k)),$$

тогда для вектора полных доходов $\bar{V}(k)$ имеет место следующее выражение [5]:

$$\bar{V}(k)=\left(E+P+P^2+\dots+P^{k-1}\right)\bar{q}+P^k\bar{V}(0), \tag{5}$$

Из (4) следует $P^k=\left(B^T\right)^k+S^T$, $S^T=\bar{e}\bar{x}^T$, $B^T=P-S^T$, поэтому соотношение (5) преобразуется к следующему виду:

$$\bar{V}(k)=\left[E+B^T+\left(B^T\right)^2+\dots+\left(B^T\right)^{k-1}+(k-1)S^T\right]\bar{q}+\left(B^T\right)^k\bar{V}(0)+S^T\bar{V}(0).$$

Для эргодической цепи Маркова $\left\|B^T\right\|<1$ и тогда [2]

$$E+B^T+\left(B^T\right)^2+\dots=\left(E-B^T\right)^{-1}.$$

С учетом этого получаем

$$\overline{V}(k)=\left[\left(E-B^T\right)^{-1}-\left(B^T\right)^k\left(E-B^T\right)^{-1}+(k-1)S^T\right]\overline{q}+\left(B^T\right)^k\overline{V}(0)+S^T\overline{V}(0),$$

откуда следует асимптотическая формула для $\overline{V}(k)$ при больших k:

$$\overline{V}(k)=kS^T\overline{q}+\left(\left(E-B^T\right)^{-1}-S^T\right)\overline{q}+S^T\overline{V}(0).$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.
2. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1960.
3. *Михайлов В.Н.* Об эргодичности однородных цепей Маркова. Саратов, 1997. 6с. Деп. в ВИНИТИ, № 1425 – В97.
4. *Ховард Р.А.* Динамическое программирование и марковские процессы. М.: Советское радио, 1964.
5. *Козлова С.И., Мастяева И.Н.* Динамическое программирование. М., 1984.

УДК 515.126.83

А. Б. Коноплев

КРИТЕРИЙ ВЫПУКЛОСТИ ФУНКЦИИ РАССТОЯНИЯ ОТ ТОЧЕК ДО ОБРАЗОВ МУЛЬТИОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть $X=R^n, Y=R^m, Z=X\times Y$. Рассмотрим замкнутозначное мультиотображение $F:X\to 2^Y$, действующее из X в Y. Обозначим через

$$\operatorname{dom}F=\{x\in X \mid F(x)\neq\varnothing\},\quad \operatorname{gr}F=\{(x,y)\in Z \mid y\in F(x)\}$$

соответственно *эффективную область* и *график* мультиотображения F.

Определение. *Мультиотображение называется выпуклым, если его график есть выпуклое множество в Z.*

Положим $z=(x,y)\in\operatorname{dom}F\times Y$. Рассмотрим функцию расстояния (ФР) от точек $y\in Y$ до образов точек $x\in\operatorname{dom}F$ мультиотображения F в произвольной норме $\|\cdot\|$

$$d_F(z)=\inf_{v\in F(x)}\|y-v\|. \tag{1}$$

Эта функция используется в негладком анализе как инструмент для исследования мультиотображений и маргинальных функций [1].

Введем обозначения

$$Q(z)=\{v\in F(x) \mid \|y-v\|=d_F(z)\},\ W(z)=\{v\in Y \mid \|y-v\|\le d_F(z)\},$$