Основным моментом доказательства является доказательство того факта, что в рассматриваемом случае для каждого характера Дирихле χ расширения $k \subset K$ существует такой характер $\hat{\chi}$ поля Q, для которого

$$\chi(\wp) = \hat{\chi}(N(\wp)).$$

Отметим, что утверждения теорем 1 и 2 позволяют уточнить в отдельных случаях, например в случае бесквадратного расширения, известный результат Брауэра о мероморфности L-функции Артина. Брауэр показал, что L-функцию Артина можно представить в виде

$$L(s,\chi) = \frac{\prod_{i=1}^{n} L_i(s,\chi_i)}{\prod_{j=1}^{m} L_j(s,\chi_j)}, \tag{2}$$

где L_i, L_j – L-функции Дирихле, отвечающие характерам Дирихле циклических подгрупп. Результаты теорем 1 и 2 позволяют производить сокращения в представлении (2).

Заметим также, что задача разложения L-функции поля k в произведение L-функций поля рациональных чисел Q представляет самостоятельный интерес в связи с решением других задач теории L-функций.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алгебраическая теория чисел / Под ред. Дж. Касселса, А. Фрёлиха. М.: Мир, 1969.

2. *Brauer R.* On Artin's L-series with general group characters // Ann. Math. 1947. Vol. 48. P. 502 – 504.

3. *Artin E.* Uber eine neue Art von L-Reihen // Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg, 1923. Vol. 3. P. 89 – 108.

УДК 511.13

М. В. Кудрявцев

ОЦЕНКА РАЦИОНАЛЬНОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СУММЫ СО ЗНАМЕНАТЕЛЕМ p^n

Пусть $n \geq 2$ – целое число, p – нечетное простое число, O_p – кольцо целых p-адических чисел, $\chi(x)$ – характер Дирихле по модулю p, $f(x) = P(x)/Q(x)$, где $P(x), Q(x)$ – многочлены с целыми рациональными коэффициентами такие, что $(P(x),Q(x))=1$, $(p,C(PQ))=1$, где $C(Q)$ – содержание многочлена $Q(x)$, $e(t)=\exp(2\pi it)$, где t – вещественное число.

Положим $U_p(f)=O_p\setminus\{z\mid z\in O_p, Q(z)\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)\}$ и, обозначив

$$U_{p^n}(f)=\{x\mid x(\mathrm{mod}\, p^n), x\in U_p(f)\}$$

– проекцию $U_p(f)$, рассмотрим сумму

$$S=S(f;\,p^n)=\sum_{x\in U_{p^n}(f)}\chi(x)\,e(f(x)p^{-n}).$$

Пусть K – поле разложения многочлена $Q^2(x)f'(x)$, k – подполе поля K такое, что все корни $f'(x)$ за исключением корней многочлена $Q(x)$ в поле k содержатся и пусть V – кольцо нормирования поля k: $V=\{x\in k\mid \mathrm{ord}_\pi x\geq 0\}$, где $\mathrm{ord}_\pi(\ldots)$ -π-адический показатель в поле k, являющийся продолжением p-адического показателя $\mathrm{ord}_p(\ldots)$ в поле p-адических чисел, и где π – простой элемент поля k. Если

$$f'(x)=A\prod_{1\leq i\leq r}(x-\xi_i)^{e_i}\Big/\prod_{r+1\leq i\leq r}(x-\xi_i)^{e_i}$$

разложение $f'(x)$ над полем K, где $e_i\geq 1, 1\leq i\leq s$, то пусть

$$F(x)=C(f')\prod_{\xi\in V,\, f'(\xi)=0}(x-\xi)^{e_\xi}.$$

Тогда утверждаем, что $F(x)\in O_p[x]$, $F(x)/C(f')$ – примитивный многочлен в O_p. Доказательство проводится аналогично тому, как в [3].

Обозначим через $e_V=\max_{1\leq i\leq r,\xi_i\in V}e_i$, $m_V=\sum_{1\leq i\leq r,\xi_i\in V}1$ соответственно наивысшую кратность и количество различных локально целых корней уравнения $f'(x)=0$ без учета кратностей;

$$\delta_i=\mathrm{ord}_p\Big(\frac{F^{(e_i)}(x)}{e_i!}\Big|_{x=\xi_i}\Big),\quad \delta_V=\max_{1\leq i\leq r,\xi_i\in V}\delta_i.$$

Для оценки сверху $|S|$ воспользуемся леммой Хуа о разбиении в модификации Смита.

Обозначим $m=[\frac{n}{2}], l=n-m$ и положим $x=y+p^m z$. Тогда

$$S=\sum_{1\leq y\leq p^m,\, y\in U_{p^n}(f)}\chi(y)e(f(y)p^{-n})\sum_{z(\mathrm{mod}\, p^l)}e((f'(y)p^m z+\frac{f''(y)}{2}p^{2m}z^2)p^{-n}).$$

Отсюда в случае n четном следует оценка

$$|S| \le p^m \sum_{\substack{1 \le y \le p^m,\, y \in U_p(f),\\ f'(y) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p^m)}} 1 = p^m N_{U_p(f)}(f'; p^m),$$

где $N_{U_p(f)}(f'; p^m)$ – число решений сравнения

$$f'(x) \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\, p^m\right),\ x \,\mathrm{mod}\, p^m,\ x \in U_p(f). \tag{1}$$

Заметим, что сравнение (1) равносильно сравнению

$$F(x) \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\, p^m\right),\ x \,\mathrm{mod}\, p^m,\ x \in U_p(f),$$

и воспользуемся оценкой числа решений полиномиального сравнения [3], что приведет к оценке

$$|S| \le m_V p^{n(1-1/(2e_V))+\delta_V/e_V}. \tag{2}$$

В случае n нечётном выводится эта же оценка.

ТЕОРЕМА. При введенных обозначениях и сделанных выше допущениях, если сравнение (1) не имеет решения, то $S=0$, а если сравнение (1) имеет решение, то справедлива оценка (2).

Есть возможность эффективизации параметров δ_V, e_V, m_V [4]. В частности, справедлива следующая оценка:

СЛЕДСТВИЕ. Если все локально целые корни многочлена $F(x)$ простые, то имеет место оценка

$$|S| \le m_V p^{n/2} \text{НОД}\left(p^n, D(F)\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $D(F)$ – дискриминант многочлена $F(x)$.

Полученная оценка суммы дополняет оценку рациональной тригонометрической суммы из работы [2].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ван дер Варден Б.Л.* Алгебра. М.: Наука, 1976.
2. *Гусев Г.И.* Оценки тригонометрических сумм изометрическим методом // Мат. и её прил.: Межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1988. С. 41 – 43.
3. *Кудрявцев М.В.* Оценки полных рациональных тригонометрических сумм. I // Мат. заметки. 1993. Т. 53, № 1. С. 59 – 67.
4. *Кудрявцев М.В.* Эффективизация параметров в задаче оценки полной рациональной тригонометрической суммы // Математика, механика и их приложения: Материалы науч. практ. конф. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1998. С. 40 – 41.