УДК 511.23

В. Н. Кузнецов

К ЗАДАЧЕ О ЦЕЛОСТНОСТИ L-ФУНКЦИЙ ЧИСЛОВЫХ ПОЛЕЙ

В данной статье рассматриваются некоторые аналитические вопросы, в основном связанные с граничным поведением степенных рядов, вставшие в связи решением задач теории L-функций.

Этот ряд вопросов возник в результате развития метода редукции к степенным рядам в задаче аналитического продолжения рядов Дирихле, суть которого частично отражается в следующей теореме, доказанной автором [1]:

ТЕОРЕМА. Ряд Дирихле $f(s)=\sum_1^\infty a_n/n^s$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=1$ тогда и только тогда продолжим целым образом в комплексную плоскость с условием роста в критической полосе $0\le\sigma\le 1$

$$|f(s)|<c\cdot e^{\frac{\pi}{2}|s|}\left(s=\sigma+it\right),$$

когда соответствующий степенной ряд

$$q(z)=\sum_1^\infty a_n z^n$$

имеет в точке z=1 конечные радиальные производные любого порядка, т.е.

$$\lim_{x\to 1-0} q^{(m)}(x)=\alpha_m, m=\overline{0,\infty}$$

1. Метод редукции к степенным рядам позволил автору [2] определить классические L-функции для неглавного характера в классе рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами как продолженные целым образом, в комплексную плоскость с условием роста вдоль отрицательной вещественной полуоси

$$|f(s)|<c\cdot e^{\ln|s|\cdot|s|+\alpha|s|}, \tag{1}$$

где $\alpha>0$.

Вопрос: можно ли в классе рядов Дирихле с произвольными коэффициентами определить класс L-функций, продолжимых целым образом на комплексную плоскость с условием роста (1) вдоль действительной оси и с дополнительным условием вдоль мнимой оси (почти периодичности, определённой плотности нулей в критической полосе и т.д.)?

2. Существенной частью известной гипотезы Н.Г. Чудакова об обобщённых характерах [3] является доказательство целостности функций вида

$$L(s,h)=\sum_1^\infty \frac{h(n)}{n^s}, \tag{2}$$

где $h(n)$ – конечнозначная, мультипликативная, числовая функция с полной базой и ограниченной сумматорной функцией

$$S(x) = \sum_{n \le x} h(n) = O(1).$$

Метод редукции к степенным рядам сводит эту задачу к существованию односторонних производных любого порядка в точке $z = 1$ функции $q(z) = \sum_1^{\infty} h(n) z^n$, где $h(n)$ – обобщённый характер. Для решения последней задачи наиболее перспективным является аппроксимационный подход: исследование вопросов приближения функций, определённых на отрезке $[0,1]$ степенными рядами с мультипликативными коэффициентами, алгебраическими полиномами. Пусть $E_n(q)$ – величина наилучшего приближения такой функции алгебраическими полиномами степени $\le n$ в равномерной норме.

Если $E_n(q) n^p \to 0, n \to \infty$, (для любого $p > 0$), то положительно решается вопрос о целостности функции (2). Если же $E_n(q) p^n \to 0, n \to \infty$, где $p > 1$, то проблема обобщённых характеров решается полностью.

Представляет интерес дать оценку величин $E_n(q)$.

3. С исследованием вопросов приближения по собственным векторам с "заданной системой образующих" связана задача о граничном поведении в точке $z = 1$ степенного ряда

$$q(z) = \sum_1^{\infty} \chi(n) z^n, \tag{3}$$

где $\chi(n)$ – характер Гекке. Данная задача встает в связи с двумя проблемами в теории L-функций.

Во-первых, представляет интерес получить теорему об аналитическом продолжении L-функции числового поля с характером Гекке без использования функционального уравнения. Во-вторых, в связи с известной гипотезой Ю.В. Линника [4]о целостности L-функций вида

$$L(s, \chi_1, \chi_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{N_{K_1}(\wp_1) = n \\ N_{K_2}(\wp_2) = n}} \chi_1(\wp_1) \chi_2(\wp_2) \right) \Big/ n^s,$$

где χ_1, χ_2 – характеры Гекке числовых полей k_1, k_2.

Для решения этой задачи достаточно показать, что степенные ряды вида (3) определяют функции, которые при $|z| < 1$ можно представить в виде

$$q(z) = R(z) + \hat{q}(z),$$

где $R(z)$ – рациональная функция с полюсами, расположенными на единичной окружности, а $\hat{q}(z)$ – ограниченная в единичном круге, у которой в любой точке $z = e^{i\varphi}$ существуют конечные радиальные производные любого порядка, т.е.

$$\lim_{r \to 1-0} \hat{q}^{(m)}(re^{i\varphi}) = \alpha_m, m = \overline{0, \infty}.$$

Отметим, что в случае характеров Дирихле соответствующий результат доказан автором [5].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кузнецов В.Н.* К задаче описания рядов Дирихле, определяющих целые функции // Тр. 3-й Сарат. зимней шк. по теории функций и приближений. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1988. Ч. 2. С. 113 – 115.

2. *Кузнецов В.Н.* Аналог теоремы Сеге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки. 1984. Т. 36. № 6. С. 805 – 813.

3. *Чудаков Н.Г., Родосский К.А.* Об обобщённом характере // ДАН СССР. 1950. Т. 73. С. 1137 – 1139.

4. *Фоменко О.М.* Продолжимость на всю плоскость и функциональное уравнение скалярного произведения L-рядов Гекке двух квадратичных полей // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1972. Т. 128. С. 131 – 137.

5. *Кузнецов В.Н* Метод редукции к степенным рядам в задаче о целостности композита рядов Дирихле // Тр. 4-й Сарат. зимней шк. по теории функций и приближений. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1990. Ч. 2. С. 139 –141.

УДК 519.2

И. А. Кузнецова

МИНИМАЛЬНЫЕ МЕТРИКИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

Данная статья относится к теории вероятностных метрик, развитой в работах В. М. Золотарёва и его школы [1]. Одним из основных понятий этой теории является понятие минимальной метрики. В настоящей статье рассмотрено его обобщение, введены ε-минимальные метрики и исследуются их свойства.

Пусть (U, d) – полное сепарабельное метрическое пространство, (Ω, Σ, P) – вероятностное пространство, X – класс случайных величин, определённых на Ω и принимающих значения в U, P^1 – класс одномерных распределений случайных величин из X, P^2 – класс двумерных распределений случайных векторов из $X \times X$.

<u>Определение 1.</u> Вероятностной метрикой называется отображение $\mu : \mathrm{P}^2 \to R$, удовлетворяющее условиям: