где $R(z)$ – рациональная функция с полюсами, расположенными на единичной окружности, а $\hat{q}(z)$ – ограниченная в единичном круге, у которой в любой точке $z = e^{i\varphi}$ существуют конечные радиальные производные любого порядка, т.е.

$$\lim_{r \to 1-0} \hat{q}^{(m)}(re^{i\varphi}) = \alpha_m, m = \overline{0,\infty}.$$

Отметим, что в случае характеров Дирихле соответствующий результат доказан автором [5].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кузнецов В.Н.* К задаче описания рядов Дирихле, определяющих целые функции // Тр. 3-й Сарат. зимней шк. по теории функций и приближений. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1988. Ч. 2. С. 113 – 115.
2. *Кузнецов В.Н.* Аналог теоремы Сеге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки. 1984. Т. 36. № 6. С. 805 – 813.
3. *Чудаков Н.Г., Родосский К.А.* Об обобщённом характере // ДАН СССР. 1950. Т. 73. С. 1137 – 1139.
4. *Фоменко О.М.* Продолжимость на всю плоскость и функциональное уравнение скалярного произведения L-рядов Гекке двух квадратичных полей // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1972. Т. 128. С. 131 – 137.
5. *Кузнецов В.Н* Метод редукции к степенным рядам в задаче о целостности композита рядов Дирихле // Тр. 4-й Сарат. зимней шк. по теории функций и приближений. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1990. Ч. 2. С. 139 –141.

УДК 519.2

И. А. Кузнецова

МИНИМАЛЬНЫЕ МЕТРИКИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

Данная статья относится к теории вероятностных метрик, развитой в работах В. М. Золотарёва и его школы [1]. Одним из основных понятий этой теории является понятие минимальной метрики. В настоящей статье рассмотрено его обобщение, введены ε-минимальные метрики и исследуются их свойства.

Пусть (U,d) – полное сепарабельное метрическое пространство, (Ω,Σ,P) – вероятностное пространство, X – класс случайных величин, определённых на Ω и принимающих значения в U, P^1 – класс одномерных распределений случайных величин из X, P^2 – класс двумерных распределений случайных векторов из $X \times X$.

Определение 1. Вероятностной метрикой называется отображение $\mu : \mathsf{P}^2 \to R$, удовлетворяющее условиям:

1) $\mu(P_0)=0$, где P_0 – двумерное распределение случайного вектора (X, Y), обладающего свойством $P\{X=Y\}=1$;

2) $\mu(P_{12})=\mu(P_{21})$, где двумерные распределения P_{12} и P_{21} связаны соотношением $P_{12}(A\times B)=P_{21}(B\times A)$, $A,B\in \mathsf{B}(U)$ ($\mathsf{B}(U)$ – класс борелевских подмножеств U);

3) $\mu(P_{12})\le\mu(P_{13})+\mu(P_{32})$ для любых согласованных распределений P_{12}, P_{13}, P_{32}.

(Набор двумерных распределений называется согласованным, если существует распределение большей размерности, соответствующие двумерные распределения которого совпадают с данными).

<u>Определение 2.</u> Пусть μ – вероятностная метрика, $\varepsilon\subset \mathsf{P}^1\times\mathsf{P}^1$ – отношение эквивалентности на P^1. ε-минимальной метрикой, соответствующей данной метрике μ, называется функционал μ_ε, определённый соотношением

$$\mu_\varepsilon(P_{12})=\inf\{\mu(P_{12}^{'}):(P_1, P_1^{'})\in\varepsilon, (P_2, P_2^{'})\in\varepsilon\}, \tag{1}$$

где $P_1=P_{r_1}P_{12}$, $P_2=P_{r_2}P_{12}$, то есть при всех $A\in\mathsf{B}(U)$ $P_1(A)=P_{12}(A\times U)$, $P_2(A)=P_{12}(U\times A)$.

Замечание 1. Если $\varepsilon=\varepsilon_0$, где

$$\varepsilon_0=\{(P_1, P_2): P_1=P_2\}, \tag{2}$$

то функционал μ_ε превращается в обычную минимальную метрику $\hat{\mu}$.

Замечание 2. Если в результате введения минимальной метрики получается функционал, зависящий не от двумерного распределения, а от пары одномерных распределений, то замена отношения равенства распределений другим отношением эквивалентности позволяет в некоторых случаях получить расстояние между классами эквивалентности распределений случайных величин в терминах характеристик данных классов. Например, если $\varepsilon_1=\{(P_X, P_Y): EX=EY\}$, то μ_{ε_1} будет зависеть только от EX и EY.

Замечание 3. Выполнение условий 1) и 2) определения 1 для μ_ε очевидно. В общем случае неясно, будет ли выполняться для данного функционала неравенство треугольника. Однако для некоторых μ и ε μ_ε обладает свойством 3) и, следовательно, является вероятностной метрикой.

ТЕОРЕМА 1. Пусть f – неубывающая функция, g – непрерывная справа неубывающая функция, ε – отношение эквивалентности на P^1, μ, ν – вероятностные метрики. Тогда из выполнения условия

$$\forall P_{12}\in\mathsf{P}^2 \quad f(\mu(P_{12}))\le g(\nu(P_{12})) \tag{3}$$

вытекает справедливость соотношения

$$\forall P_{12}\in\mathsf{P}^2 \quad f(\mu_\varepsilon(P_{12}))\le g(\nu_\varepsilon(P_{12})). \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $P_{12} \in \mathrm{P}^2$, $P_1 = P_{r_1}P_{12}$, $P_2 = P_{r_2}P_{12}$. При всех натуральных n существует распределение P_{12}^n, удовлетворяющее условиям $\left(P_1^n, P_1\right) \in \varepsilon$, $\left(P_2^n, P_2\right) \in \varepsilon$, $\nu\left(P_{12}^n\right) \leq \nu_\varepsilon\left(P_{12}\right) + \frac{1}{n}$. Поскольку верны соотношения $\left(P_1^n, P_1\right) \in \varepsilon, \left(P_2^n, P_2\right) \in \varepsilon$, то справедливо неравенство $\mu_\varepsilon\left(P_{12}\right) \leq \mu\left(P_{12}^n\right)$. Используя полученные соотношения, условие (3) и монотонность функций f и g, получаем цепочку неравенств

$$f\left(\mu_\varepsilon\left(P_{12}\right)\right) \leq f\left(\mu\left(P_{12}^n\right)\right) \leq g\left(\nu\left(P_{12}^n\right)\right) \leq g\left(\nu_\varepsilon\left(P_{12}\right) + \frac{1}{n}\right).$$

Устремляя n к ∞, с учётом непрерывности справа функции g получаем требуемое неравенство $f\left(\mu_\varepsilon\left(P_{12}\right)\right) \leq g\left(\nu_\varepsilon\left(P_{12}\right)\right)$. Доказательство теоремы завершено.

Замечание 4. Теорема 1 позволяет, имея некоторые неравенства для вероятностных метрик, получить соответствующие неравенства для ε-минимальных метрик.

ТЕОРЕМА 2. Для любой метрики μ и отношения эквивалентности ε справедливо равенство

$$\mu_\varepsilon = \hat{\mu}_\varepsilon. \tag{5}$$

Доказательство. Для любого отношения эквивалентности ε на P^1 вследствие его рефлексивности справедливо включение $\varepsilon_0 \subset \varepsilon$. Следовательно, для любой метрики μ и произвольного $P_{12} \in \mathrm{P}^2$ выполняется неравенство $\mu_{\varepsilon_0}\left(P_{12}\right) \geq \mu_\varepsilon\left(P_{12}\right)$, то есть $\hat{\mu}\left(P_{12}\right) \geq \mu_\varepsilon\left(P_{12}\right)$, откуда имеем $\hat{\mu}_\varepsilon\left(P_{12}\right) \geq \left(\mu_\varepsilon\right)_\varepsilon\left(P_{12}\right)$ и

$$\hat{\mu}_\varepsilon\left(P_{12}\right) \geq \mu_\varepsilon\left(P_{12}\right). \tag{6}$$

С другой стороны, для этих же μ и P_{12} справедливо соотношение $\hat{\mu}\left(P_{12}\right) \leq \mu\left(P_{12}\right)$, из которого вытекает неравенство

$$\hat{\mu}_\varepsilon\left(P_{12}\right) \leq \mu_\varepsilon\left(P_{12}\right). \tag{7}$$

(6) и (7) дают нам требуемое равенство (5). Доказательство теоремы завершено.

Следующая теорема даёт выражения ε-минимальных метрик для конкретных метрик и отношений эквивалентности.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $U = R$. Справедливы равенства

$$\tau_{\varepsilon_1}\left(P_{XY}\right) = \left|EX - EY\right|, \tag{8}$$

$$æ_{\varepsilon_1}\left(P_{XY}\right) = \left|EX - EY\right|, \tag{9}$$

$$i_{\varepsilon_1}\left(P_{XY}\right) = 0, \tag{10}$$

$$\sigma_{\varepsilon_1}\left(P_{XY}\right) = 0, \tag{11}$$

где $\tau(P_{XY}) = E|X-Y|$, $\text{æ}(P_{XY}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F_X(x) - F_Y(x)| dx$, $i(P_{XY}) = P\{X \neq Y\}$,

$\sigma(P_{XY}) = \sup\limits_{A \in \mathbf{B}(R)} |P_X(A) - P_Y(A)|$, $\varepsilon_1 = \{(P_X, P_Y): EX = EY\}$.

Доказательство. Верны соотношения

$$\tau_{\varepsilon_1}(P_{XY}) = \inf\left\{E\left|X' - Y'\right| : EX' = EX, EY' = EY\right\} \geq |EX - EY|.$$

Нижняя оценка достигается на распределении пары случайных величин (X^*, Y^*), определяемых условием $P\left\{X^* = EX, Y^* = EY\right\} = 1$. Таким образом, равенство (8) доказано. (9) получается из (8) применением теоремы 2 с использованием известного соотношения $\text{æ} = \hat{\tau}$ [1].

Для доказательства равенства (10) возьмём произвольное распределение P_{XY} и обозначим $EX = \alpha$, $EY = \beta$. Верно равенство $i_{\varepsilon_1}(P_{XY}) = \inf\left\{P\left\{X' \neq Y'\right\}: EX' = \alpha, EY' = \beta\right\}$. При $\alpha = \beta$ соотношение (10) очевидно. Предположим, что $\alpha \neq \beta$. Для любого $p \in (0,1)$ зададим двумерное распределение случайного вектора (X_p, Y_p) равенствами

$$P\left\{X_p = 0, Y_p = 0\right\} = p, \ P\left\{X_p = \alpha/1-p, \ Y_p = \beta/1-p\right\} = 1-p,$$

$$P\left\{X_p = 0, \ Y_p = \beta/1-p\right\} = P\left\{X_p = \alpha/1-p, \ Y_p = 0\right\} = 0.$$

Нетрудно видеть, что $EX_p = \alpha$, $EY_p = \beta$ и $P\left\{X_p \neq Y_p\right\} = 1-p$. Таким образом, $\inf\left\{P\left\{X' \neq Y'\right\}: EX' = \alpha, EY' = \beta\right\} = 0$ и равенство (10) доказано. (11) получается из (10) применением теоремы 2 с использованием соотношения $\hat{i} = \sigma$ [1].

В дальнейшем интересно рассмотреть ε-минимальные метрики для отношений эквивалентности $\varepsilon_k = \{(P_X, P_X): EX^l = EY^l, \ l = 1, \ldots, k\}$ и с их помощью, используя теорему 1, имея неравенства вида (3), получить неравенства вида (4), которые будут выражены в терминах EX^l и EY^l, $l = 1, \ldots, k$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Золотарёв В.М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986.