УДК 517.51

С. Ф. Лукомский

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТРАНСТВ ЛОРЕНЦА, БЛИЗКИХ К L^{∞}

Пусть $(G, \sum, \mu)$ пространство с конечной мерой μ и пусть для определенности $\mu G = 1$. Для функции $f \in L(G)$ положим

$$\lambda_f(y) = \mu\{x \in G: \ |f(x)| > y\} \quad (y > 0). \tag{1}$$

и

$$f^*(t) = \inf\{y > 0 : \lambda_f(y) \le t\} \quad (0 < t \le 1). \tag{2}$$

Функция $f^*(t)$ является равноизмеримой перестановкой для $|f(x)|$.

Пусть $\psi(t) \ge 0$ возрастающая, непрерывная на $[0,1]$, функция. Рассмотрим пространства Лоренца

$$\Lambda_{\psi,p}(G) = \left\{ f \in L(G) : \| f \|_{\psi,p} = \left\{ \int_0^1 (\psi(t) f^*(t))^p \frac{dt}{t} \right\}^{1/p} \| f \|_{\psi,p} < +\infty \right\} \quad (p \ge 1)$$

для случая, когда $\psi(t) = \psi_\alpha(t) = \left(1 + \log t^{-1}\right)^{-\alpha}$ $(\alpha \ge 1)$. Эти пространства Лоренца расположены между L^p и L^∞, и для них мы хотим предложить две новые характеристики.

ТЕОРЕМА. Пусть $p > 1, \alpha \ge 1, \psi(t) = \left(1 + \log_2 t^{-1}\right)^{-\alpha}$. Тогда

1) $f \in \Lambda_{\psi,p}(G) \Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{\| f \|_n}{n^\alpha} \right)^p < \infty$;

2) $f \in \Lambda_{\psi,p}(G) \Leftrightarrow f \in \bigcup\limits_{\varphi \in \Phi} \bigcap\limits_{\gamma \supset 1} L\left(\gamma^{\varphi(|f|)}\right)$,

где Φ – это семейство непрерывных, положительных, строго возрастающих на $(0,\infty)$ функций φ таких, что

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{\varphi^{-1}(t)}{t^\alpha} \right)^p dt < +\infty \quad (\varphi^{-1} - \text{обратная к } \varphi)$$

и $L\left(\gamma^{\varphi|f|}\right)$ – классы Орлича, т. е.

$$L\left(\gamma^{\varphi(|f|)}\right) = \left\{ f \in L(G) : \int_G \gamma^{\varphi(|f|)} d\mu < +\infty \right\}.$$

Доказательство. **1.** Так как f и f^* равноизмеримы, то $\| f \|_n = \| f^* \|_n$, поэтому, учитывая монотонность f^*, получаем

$$\| f^* \|_n^n = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} f^*(t)dt \ge \sum_{k=0}^{\infty} f^*\left(2^{-k}\right)^n \ge f^*\left(2^{-n}\right)^n \cdot 2^{-n-1}.$$

Отсюда $\| f^* \|_n \ge f^*\left(2^{-n}\right)4^{-1}$. Поэтому

$$\| f \|_{\psi,p}^p = \int_0^1 \left(\psi_\alpha \cdot f^*(t)\right)^p \frac{dt}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} \left(\psi_\alpha \cdot f^*(t)\right)^p \frac{dt}{t} \le \sum_{k=0}^{\infty} f^*\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)^p \times$$

$$\times \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} \left(\psi_\alpha \cdot f^*(t)\right)^p \frac{dt}{t} \le \sum_{k=0}^{\infty} f^*\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)^p \frac{1}{2^{k+1}} 2^{k+1} \frac{1}{(k+1)^{\alpha p}} \le$$

$$\le 4^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\| f^* \|_{k+1}^p}{(1+k)^{\alpha p}} = 4^p \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\| f \|_n}{n^\alpha}\right)^p. \qquad (3)$$

Таким образом, если $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\| f \|_n}{n^\alpha}\right)^p < \infty$, то $f \in \Lambda_{\psi,p}$ с $\psi = \left(1 + \log t^{-1}\right)^{-\alpha}$.

Покажем обратное неравенство. Будем считать, что $\| f \|_{\psi,p} > 0$, так как в противном случае включение очевидно. Обозначим

$$x(t) = \begin{cases} f(t), & \text{если } | f(t) | \ge 1/2 \| f \|_{\psi,p}; \\ 1/2 \| f \|_{\psi,p}, & \text{если } | f(t) | < 1/2 \| f \|_{\psi,p}. \end{cases} \qquad (4)$$

Учитывая, что $\| f \|_{\psi,p}$ – норма, нетрудно проверить неравенства

$$\| f \|_p \le \| x \|_p, \quad 1/2 \| f \|_{\psi,p} \le \| x \|_{\psi,p} \le \lambda \| f \|_{\psi,p}, \quad (\lambda = 1 + (\alpha p - 1)^{-1/p}/2) \qquad (5)$$

Очевидно, что $| x | \ge \frac{1}{2} \| f \|_{\psi,p}$ всюду в G. Для нормы $\| x \|_{\psi,p}$ имеем

$$\| x \|_{\psi,p}^p = \int_0^1 \left(\psi_\alpha(t) x^*(t)\right)^p \frac{dt}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} \left(\psi_\alpha(t) x^*(t)\right)^p \frac{dt}{t} \ge \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^*(2^{-k})}{(k+2)^\alpha}\right)^p \frac{2^k}{2^{k+1}} \ge$$

$$\ge \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x^*(2^{-k})}{k^\alpha}\right)^p \left(\frac{k}{k+2}\right)^{\alpha p} \ge \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha p} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x^*(2^{-k})}{k^\alpha}\right)^p. \qquad (6)$$

Учитывая (5) и неравенство $| x(t) | \ge 1/2 \| f \|_{\psi,p}$, получаем

$$\| x \|_n^n = \int_0^1 x^*(t)^n dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} x^*(t)^n dt \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^*(2^{-k})^n}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x^*(2^{-k})}{k^\alpha}\right)^p \frac{x^*(2^{-k})^n}{2^k} \times$$

$$\times k^{\alpha p} \frac{1}{x^*(2^{-k})^p} \le \frac{2^p}{\| f \|_{\psi,p}^p} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x^*(2^{-k})}{k^\alpha}\right)^p \sup_k \frac{x^*(2^{-k})^n}{2^k} \cdot k^{\alpha p} \le$$

$$\leq 2^{p+1}3^{\alpha p}\frac{\|x\|_{\psi,p}^{p}}{\|f\|_{\psi,p}^{p}}\cdot\sup_{k}\frac{x^{*}(2^{-k})^{n}}{2^{k}}\cdot k^{\alpha p}\leq 8^{p}3^{\alpha p}\cdot 2\sup_{k}\frac{x^{*}(2^{-k})^{n}}{2^{k}}\cdot k^{\alpha p}. \quad (7)$$

Обозначим через k_n то значение k, при котором достигается sup в правой части неравенства (7). Тогда

$$\|x\|_{n}\leq 2(8\cdot 3^{\alpha})^{\frac{p}{n}}x^{*}(2^{-k_n})\cdot k_{n}^{\frac{\alpha p}{n}}\cdot 2^{-\frac{k_n}{n}}\leq 2(8\cdot 3^{\alpha})^{p}x^{*}(2^{-k_n})\cdot k_{n}^{\frac{\alpha p}{n}}\cdot 2^{-\frac{k_n}{n}}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\|x\|_{n}}{n^{\alpha}}\right)^{p}\leq 2^{p}(8\cdot 3^{\alpha})^{p^{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{*}(2^{-k_n})^{p}}{n^{\alpha p}}\cdot k_{n}^{\frac{\alpha p}{n}}\cdot 2^{-\frac{k_n}{n}}.$$

Обозначим $K(s)=\left\{n : s\leq\frac{k_n}{n}<s+1\right\}$. Учитывая (6), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\|x\|_{n}}{n^{\alpha}}\right)^{p}\leq c(\alpha,p)\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n\in K(s)}\frac{x^{*}(2^{-k_n})^{p}}{n^{\alpha p}}\frac{k_{n}^{\frac{\alpha p^{2}}{n}}}{2^{\frac{k_n}{n}p}}\leq c(\alpha,p)\times$$

$$\times\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n\in K(s)}\frac{x^{*}(2^{-ns})^{p}}{n^{\alpha p}}\frac{(n(s+1))^{\frac{\alpha p^{2}}{n}}}{2^{sp}}=c(\alpha,p)\cdot\sum_{s=1}^{\infty}\frac{s^{\alpha p}}{2^{sp}}\sum_{n\in K(s)}\frac{x^{*}(2^{-ns})^{p}}{(sn)^{\alpha p}}\times$$

$$\times(s+1)^{\frac{\alpha p^{2}}{n}}n^{\frac{\alpha p^{2}}{n}}\leq c_{1}(\alpha,p)\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(s+1)^{\alpha p(1+p)}}{2^{sp}}\sum_{n\in K(s)}\frac{x^{*}(2^{-ns})^{p}}{(sn)^{\alpha p}}\leq$$

$$\leq c_{2}(\alpha,p)\cdot\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(s+1)^{\alpha p(1+p)}}{2^{sp}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{*}(2^{-n})}{(n)^{\alpha}}\right)^{p}\leq c_{3}(\alpha,p)\|x\|_{\psi,p}^{p},$$

что и доказывает с учетом (5) неравенство, обратное к (3), а значит и утверждение 1) теоремы.

2. Ранее в работе автора [1] было доказано, что условие $f\in\bigcup_{\varphi\in\Phi}\bigcap_{\gamma>1}L(\gamma^{\varphi(|f|)})$ равносильно условию $\sum\left(\frac{\|f\|_{n}}{n^{\alpha}}\right)^{p}<\infty$, т.е. условие 2) теоремы тоже верно.

Отметим, что условие 2) доказанной теоремы дает новые необходимые и достаточные условия, при которых коэффициенты суммы ряда Радемахера

$$f=\sum_{k=0}^{\infty}c_{k}r_{k}(t)$$

принадлежат пространству l^{p} $(1<p<2)$ [2].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Лукомский С.Ф.* О сходимости рядов Уолша в пространствах, близких к L^{∞} // Мат. заметки. 2001. Т. 10, № 6. С. 861 – 868.

2. *Rodin V.A., Semenov E.M.* Rademacher series in symmetric spaces // Analysis Mathematica. 1975. Vol. 1. P. 207 – 222.

УДК 518:517.944

А. Д. Луньков

ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СО СЛУЧАЙНЫМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ

Рассмотрим задачу расчета нестационарных температурных полей в двумерных составных областях, возникающую в случае, когда тепловой поток проходит через однородное тело (то есть коэффициент теплопроводности не зависит от координат).

Стандартная детерминированная задача такого вида выглядит следующим образом: в многосвязной области D в прямоугольной системе координат (x, y) задано нестационарное уравнение теплопроводности

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial\theta}{\partial t} = \Delta\theta + q(x, y, t),\ \Delta - \text{двумерный оператор Лапласа}. \qquad (1)$$

Даны начальные условия $\theta(x, y, 0) = h_0(x, y)$ и граничные условия (предполагаем, что они 3-го рода) $\lambda\ \dfrac{\partial\theta}{\partial n} + \alpha\theta = \alpha\theta_{ж}$.

Внесем некоторые изменения в уравнения и, следовательно, в постановку задачи. Предположим, что функция q, называемая функцией тепловыделения, зависит от геометрических и временных координат, а также и от случайных факторов, а именно: пусть q – случайный процесс вида

$$q\ = q_0 + q_1 f(t). \qquad (2)$$

Здесь f и q_0 – детерминированные (неслучайные) функции времени, q_1 – случайная величина. Тогда и температура θ – случайный процесс. В общем случае даже при нулевом значении математического ожидания q_1 процесс $q_1 f$ не будет стационарным в широком смысле.

Рассмотрим метод сведения стохастической задачи к детерминированной. Будем искать решение в виде

$$\theta(x, y, t) == \theta_0(x, y, t) + q_1\theta_1(x, y, t). \qquad (3)$$

Тогда уравнение теплопроводности принимает вид