БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Лукомский С.Ф.* О сходимости рядов Уолша в пространствах, близких к L^∞ // Мат. заметки. 2001. Т. 10, № 6. С. 861 – 868.

2. *Rodin V.A., Semenov E.M.* Rademacher series in symmetric spaces // Analysis Mathematica. 1975. Vol. 1. P. 207 – 222.

УДК 518:517.944

А. Д. Луньков

ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СО СЛУЧАЙНЫМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ

Рассмотрим задачу расчета нестационарных температурных полей в двумерных составных областях, возникающую в случае, когда тепловой поток проходит через однородное тело (то есть коэффициент теплопроводности не зависит от координат).

Стандартная детерминированная задача такого вида выглядит следующим образом: в многосвязной области D в прямоугольной системе координат (x,y) задано нестационарное уравнение теплопроводности

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial\theta}{\partial t} = \Delta\theta + q(x,y,t),\ \Delta - \text{двумерный оператор Лапласа}. \tag{1}$$

Даны начальные условия $\theta(x,y,0) = h_0(x,y)$ и граничные условия (предполагаем, что они 3-го рода) $\lambda\ \dfrac{\partial\theta}{\partial n} + \alpha\theta = \alpha\theta_{ж}$.

Внесем некоторые изменения в уравнения и, следовательно, в постановку задачи. Предположим, что функция q, называемая функцией тепловыделения, зависит от геометрических и временных координат, а также и от случайных факторов, а именно: пусть q – случайный процесс вида

$$q\ = q_0 + q_1 f(t). \tag{2}$$

Здесь f и q_0 – детерминированные (неслучайные) функции времени, q_1 – случайная величина. Тогда и температура θ – случайный процесс. В общем случае даже при нулевом значении математического ожидания q_1 процесс $q_1 f$ не будет стационарным в широком смысле.

Рассмотрим метод сведения стохастической задачи к детерминированной. Будем искать решение в виде

$$\theta(x,y,t) == \theta_0(x,y,t) + q_1\theta_1(x,y,t). \tag{3}$$

Тогда уравнение теплопроводности принимает вид

$$\frac{\partial\theta_0}{\partial t} + q_1 \frac{\partial\theta_1}{\partial t} = \Delta\theta_0 + q_0 + q_1 \Delta\theta_1 + q_1 f(t). \tag{4}$$

Граничные условия 3-го рода принимают вид

$$\frac{\partial\theta_0}{\partial n} + q_1 \frac{\partial\theta_1}{\partial n} + \alpha\theta_0 + \alpha q_1\theta_1 = \alpha\theta_ж .$$

Приравняв случайные, а затем и неслучайные составляющие левой и правой частей уравнения (4) (то есть слагаемые, содержащие и не содержащие q_1), получаем уравнения

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial t} = \Delta\theta_1 + f(t); \tag{5}$$

$$\frac{\partial\theta_0}{\partial t} = q_0 + \Delta\theta_0. \tag{6}$$

Приравняв подобным образом случайные и неслучайные составляющие граничных и начальных условий, получим новый набор условий:

$$\lambda\frac{\partial\theta_1}{\partial n} + \alpha\theta_1 = 0, \tag{5а}$$

$$\theta_1(x,y,0) = 0, \tag{5б}$$

$$\lambda \frac{\partial\theta_0}{\partial n} + \alpha\theta_0 = \alpha\theta_ж, \tag{6а}$$

$$\theta_0(x,y,0) = h_0(x,y). \tag{6б}$$

Таким образом, имеем уравнения теплопроводности (5) и (6) с граничными условиями (5а, 5б) и (6а, 6б) соответственно. Эти две краевые задачи дают решения, комбинация которых, полученная согласно (3), удовлетворяет исходной задаче теплопроводности для уравнения (1). Каждое из уравнений (5) и (6) можно решить численно способом, описанным в [1]. Результатом такого процесса решения для некоторой точки (x,y) в некоторый момент времени t будут значения θ_0 и θ_1. Общее решение, определяемое в соответствии с (3) – случайный процесс для каждого фиксированного (x,y).

Основные характеристики этого процесса можно получить с помощью следующих элементарных вычислений:

$$M\theta = M(\theta_0 + q_1\theta_1) = \theta_0 + \theta_1 M q_1,$$

$$K_\theta(t_1,t_2) = M((\theta(x,y,t_1) - M\theta(x,y,t_1))(\theta(x,y,t_2) - M\theta(x,y,t_2))) =$$

$$= M((q_1\theta_1(x,y,t_1) + \theta_0 - Mq_1\theta_1(x,y,t_1) - M\theta_0)\times$$

$$\times(q_1\theta_1(x,y,t_2) + \theta_0 - Mq_1\theta_1(x,y,t_2) - M\theta_0)) =$$

$$= \theta_1(x,y,t_1)\theta_1(x,y,t_2)M(q_1 - Mq_1)^2 = \theta_1(x,y,t_1)\theta_1(x,y,t_2)Dq_1$$

$$D\theta(x,y,t) = [\ \theta_1(x,y,t)\ ]^2 Dq_1.$$

В стационарном случае можно приближенно подсчитать и спектральную плотность случайного процесса по формуле

$$S_\theta(\omega) = \frac{1}{\pi}\theta_1(x,y,0)Dq_1 \int_{-\infty}^{+\infty}\theta_1(x,y,\tau)\cos(\omega\tau)d\tau.$$

В общем случае температура не является стационарным в широком смысле процессом, даже если тепловыделение стационарно (корреляционная функция не будет функцией разности аргументов).

В качестве примера рассмотрим задачу, заданную в области, граница которой – эллипс с центром в начале координат, с полуосями 0,5 и 0,25. Параметры уравнения и функции, от которых зависят начальные и граничные условия, определим так:

$$\alpha = 1;\ \lambda = 1;\ h_0 = 1;\ q_0 = t;\ \theta_ж = 1;\ f = 1000 * \sin(t).$$

Случайная величина q_1 подчиняется распределению Гаусса с математическим ожиданием, равным 1 и дисперсией, равной 1.

Приведем значения математического ожидания и дисперсии температуры для некоторых характерных точек границы области.

При t=0,00025				
(x,y)	(0.5,0)	(0.353,0.176)	(0,0.25)	(-0.5,0)
$M\theta$	1,038	1,03722	1,03723	1,038
$D\theta$	0,0000001017	0,0000001009	0,0000001006	0,0000001017
При t=0,005				
(x,y)	(0.5,0)	(0.353,0.176)	(0,0.25)	(-0.5,0)
$M\theta$	1,227	1,193	1,185	1,227
$D\theta$	0,0002334	0,0002187	0,0002146	0,0002334

Подсчитаны также характеристики и внутри области. Там среднее и дисперсия, как правило, меньше, чем на границе.

Метод обобщается на тот случай, когда область состоит из нескольких частей, различающихся по коэффициентам теплопроводности. Этот случай рассмотрен в [1]. Если же тепловыделение будет случайным процессом более общего вида, то задача может быть решена с помощью статистического моделирования такого процесса и решение для каждой реализации процесса детерминированного уравнения теплопроводности может быть найдено способом, описанным в [2].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Луньков А.Д.* Плоские нестационарные задачи теплопроводности в составных областях // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 163 – 166.

2. *Федик И.И., Колесов В.С., Михайлов В.Н.* Температурные поля и термонапряжения в ядерных реакторах. М.: Энергоатомиздат, 1985.

УДК 519.6

М. А. Ляшко

ОПТИМАЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В статье рассматривается система n линейных алгебраических уравнений с n переменными

$$x = Ax + b, \quad A \in R^{n\times n}, \quad x, b \in R^n, \tag{1}$$

про которую известно, что её коэффициенты могут независимо изменяться в некоторых заданных промежутках: $a_{ij} \in [\underline{a}_{ij}; \overline{a}_{ij}]$, $\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij} \in R$, $\underline{a}_{ij} \le \overline{a}_{ij}$, $b_i \in [\underline{b}_i; \overline{b}_i]$, $\underline{b}_i, \overline{b}_i \in R$, $\underline{b}_i \le \overline{b}_i$, $i, j = \overline{1,n}$. Согласно принятой терминологии [1], замкнутые промежутки действительной оси называются интервалами и обозначаются **a**, **b**, **c**,… Арифметические операции над интервалами $\mathbf{a} = [\underline{a}; \overline{a}]$ и $\mathbf{b} = [\underline{b}; \overline{b}]$ определяются следующим образом:

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = \{a * b \mid a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}\}, \text{ где } * \in \{+,-,\times,\div\}. \tag{2}$$

Достаточно очевидно, что в результате любой операции получается интервал (деление возможно, если делитель не содержит нуля), причем

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = [\min\{\underline{a} * \underline{b}, \underline{a} * \overline{b}, \overline{a} * \underline{b}, \overline{a} * \overline{b}\}; \max\{\underline{a} * \underline{b}, \underline{a} * \overline{b}, \overline{a} * \underline{b}, \overline{a} * \overline{b}\}]. \tag{3}$$

Такое определение арифметических операций над величинами, которые могут принимать значения из некоторого промежутка, имеет преимущества перед определением результата операций над приближенными числами в классической теории погрешностей. Например, если интерпретировать интервал $\mathbf{a} = [1;3]$ как приближенное число $a = 2 \pm 1$, а интервал $\mathbf{b} = [2;4]$ как $b = 3 \pm 1$, то в результате их перемножения получим число $a \cdot b = 6 \pm 5$, которое можно интерпретировать как интервал [1;11], в то время как формула (2) или (3), учитывающая все значения сомножителей и не приобретающая лишних даёт интервал [2;12].

Обозначим множество действительных интервалов IR, множество n-мерных векторов с интервальными компонентами – IR^n, множество квадратных матриц $n \times n$ с интервальными коэффициентами – $IR^{n\times n}$. Меняя значения коэффициентов системы (1) в указанных числовых проме-