БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Луньков А.Д.* Плоские нестационарные задачи теплопроводности в составных областях // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 163 – 166.

2. *Федик И.И., Колесов В.С., Михайлов В.Н.* Температурные поля и термонапряжения в ядерных реакторах. М.: Энергоатомиздат, 1985.

УДК 519.6

М. А. Ляшко

ОПТИМАЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В статье рассматривается система n линейных алгебраических уравнений с n переменными

$$x = Ax + b, \quad A \in R^{n\times n}, \quad x, b \in R^n, \tag{1}$$

про которую известно, что её коэффициенты могут независимо изменяться в некоторых заданных промежутках: $a_{ij} \in [\underline{a}_{ij}; \overline{a}_{ij}]$, $\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij} \in R$, $\underline{a}_{ij} \le \overline{a}_{ij}$, $b_i \in [\underline{b}_i; \overline{b}_i]$, $\underline{b}_i, \overline{b}_i \in R$, $\underline{b}_i \le \overline{b}_i$, $i, j = \overline{1,n}$. Согласно принятой терминологии [1], замкнутые промежутки действительной оси называются интервалами и обозначаются **a**, **b**, **c**,... Арифметические операции над интервалами $\mathbf{a} = [\underline{a}; \overline{a}]$ и $\mathbf{b} = [\underline{b}; \overline{b}]$ определяются следующим образом:

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = \{a * b \mid a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}\}, \text{ где } * \in \{+,-,\times,\div\}. \tag{2}$$

Достаточно очевидно, что в результате любой операции получается интервал (деление возможно, если делитель не содержит нуля), причем

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = [\min\{\underline{a} * \underline{b}, \underline{a} * \overline{b}, \overline{a} * \underline{b}, \overline{a} * \overline{b}\}; \max\{\underline{a} * \underline{b}, \underline{a} * \overline{b}, \overline{a} * \underline{b}, \overline{a} * \overline{b}\}]. \tag{3}$$

Такое определение арифметических операций над величинами, которые могут принимать значения из некоторого промежутка, имеет преимущества перед определением результата операций над приближенными числами в классической теории погрешностей. Например, если интерпретировать интервал $\mathbf{a} = [1;3]$ как приближенное число $a = 2 \pm 1$, а интервал $\mathbf{b} = [2;4]$ как $b = 3 \pm 1$, то в результате их перемножения получим число $a \cdot b = 6 \pm 5$, которое можно интерпретировать как интервал [1;11], в то время как формула (2) или (3), учитывающая все значения сомножителей и не приобретающая лишних даёт интервал [2;12].

Обозначим множество действительных интервалов IR, множество n-мерных векторов с интервальными компонентами – IR^n, множество квадратных матриц $n \times n$ с интервальными коэффициентами – $IR^{n\times n}$. Меняя значения коэффициентов системы (1) в указанных числовых промежутках, получаем множество систем, которые можно объединить одной формальной записью

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \in IR^{n\times n}, \quad \mathbf{b}, \mathbf{x} \in IR^{n}. \tag{4}$$

Система (4) называется интервальной системой линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ). Интервальный вектор $\mathbf{x}^*$ называется решением системы (4), если подстановка этого вектора в данную систему и выполнение всех операций по правилам интервальной арифметики приводит к верному равенству. Таким образом, $\mathbf{x}^*$ является неподвижной точкой отображения $\mathbf{Ax}+\mathbf{b}$: $IR^n \to IR^n$. Одной из самых важных задач в теории решения таких систем является нахождение объединенного множества решений (ОМР)

$$\Sigma = \{x \mid (\exists A \in \mathbf{A})(\exists b \in \mathbf{b})(x = Ax + b)\}, \tag{5}$$

т.е. множества, состоящего из решений всех точечных систем (1), входящих в интервальную (4). Множество (5) является объединением выпуклых в каждом гипероктанте множеств, имеющих совпадающие грани на координатных плоскостях, и в общем случае невыпукло, а при условии невырожденности всех точечных матриц I-A, где $A \in \mathbf{A}$, множество (5) является ограниченным, и актуальной становится задача отыскания или ограничения минимального по ширине интервального вектора, содержащего ОМР (5), так называемой интервальной оболочки

$$\begin{gathered} \mathbf{X}^H = \left(\mathbf{x}_1^H, \ldots, \mathbf{x}_n^H\right)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{x}_i^H = \left[\underline{x}_i^H; \overline{x}_i^H\right], \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ \underline{x}_i^H = \min\{x_i \mid x \in \Sigma\}, \quad \overline{x}_i^H = \max\{x_i \mid x \in \Sigma\}. \end{gathered} \tag{6}$$

Эта задача намного легче, чем задача отыскания ОМР. Например, при условии, что матрица $|\mathbf{A}|$, составленная из модулей наиболее удаленных от нуля концов $\mathbf{A}$, имеет спектральный радиус меньше 1, решение системы (4) $\mathbf{x}^*$ содержит $\mathbf{X}^H$, а в некоторых случаях и совпадает с ней: $\mathbf{X}^H \subseteq \mathbf{x}^*$. Ниже на рис. 1 и рис. 2 приведены две системы, для каждой из которых указано ОМР Σ, интервальная оболочка $\mathbf{X}^H$ и решение $\mathbf{x}^*$.

В случае совпадения $\mathbf{X}^H = \mathbf{x}^*$ интервальная оболочка $\mathbf{X}^H$ может быть найдена с любой степенью точности итерационными методами, которые просты в реализации. Таким образом, необходимо выделить класс систем (4), на которых такое совпадение достигается, и решение, полученное итерационным методом, дает оптимальную (неулучшаемую) оценку разброса значений каждой переменной. Имеется доказательство [1] совпадения $\mathbf{X}^H = \mathbf{x}^*$ для случая неотрицательных коэффициентов матрицы $\mathbf{A}$: $0 \le \underline{a}_{ij} \le \overline{a}_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ (рис. 1). Автором [2] были получены достаточные условия совпадения $\mathbf{X}^H = \mathbf{x}^*$ для систем (4) с матрицами, состоящими из коэффициентов, не содержащих нуля внутри (знакопостоянных) или чисто нулевых: $0 \le \underline{a}_{ij} \le \overline{a}_{ij}$ или $\underline{a}_{ij} \le \overline{a}_{ij} \le 0$, $i, j = 1,2,\ldots,n$.

ТЕОРЕМА 1. Для того чтобы выполнялось равенство $\mathbf{X}^H = \mathbf{x}^*$, достаточно, а при условии, что ни один внедиагональный коэффициент **A** не вырождается в 0 и ни одна интервальная компонента $\mathbf{X}^H$ не вырождается в точку, то и необходимо, чтобы главная диагональ **A** состояла из неотрицательных интервалов, а знаки коэффициентов $\mathbf{a}_{ij}$ при $i \neq j$ совпадали с произведением знаков $\mathbf{a}_{1i}$ и $\mathbf{a}_{1j}$.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} [0.6;0.8] & [0;0.2] \\ [0;0.1] & [0.6;0.8] \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{pmatrix} [-0.2;0.2] \\ [-0.2;0.2] \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} [0.6;0.8] & [-0.1;0.2] \\ [-0.12;0.1] & [0.6;0.8] \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{pmatrix} [-0.2;0.2] \\ [-0.2;0.2] \end{pmatrix}$$

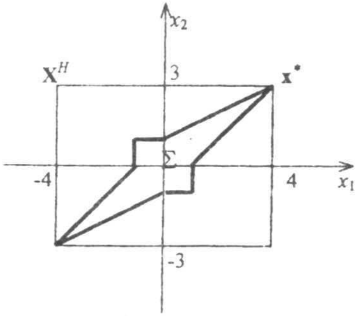

Рис. 1

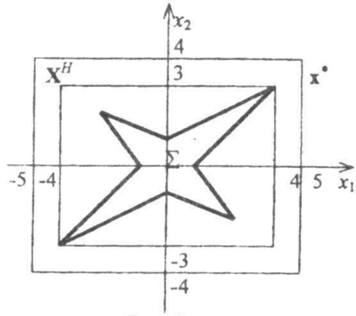

Рис. 2

При проверке достаточных условий нулевому коэффициенту можно приписать любой знак. Система на рис.1 удовлетворяет достаточному условию совпадения $\mathbf{X}^H = \mathbf{x}^*$. Матрица системы на рис.2 содержит коэффициенты с 0 внутри.

Полученный результат удалось распространить и на системы с матрицами, коэффициенты которых содержат 0 внутри. Рамки этой статьи не позволяют в полной мере изложить теорию, лежащую в основе доказательства. Она опирается на одно интересное свойство интервального умножения. Например, [-1;3]x[-1;1]=[-3;3], и в то же время [-3;3]=[0;3]x[-1;1]= =[3;3]x[-1;1] и т.д., то есть коэффициент [-1;3] при умножении на [-1;1] может быть заменен на неотрицательный (знакопостоянный) интервал [0;3] и даже на число [3;3] без изменения результата. Возможность такой замены в общем случае легко алгоритмизируется.

ТЕОРЕМА 2. Пусть в системе (4) матрица **A** и решение $\mathbf{x}^*$ таковы, что все коэффициенты $\mathbf{a}_{ij}$, где $\underline{a}_{ij} < 0 < \overline{a}_{ij}$ и $\underline{x}_j^* \neq \overline{x}_j^*$, могут быть заменены на $\widetilde{\mathbf{a}}_{ij}$, так что $\widetilde{\mathbf{a}}_{ij} = [\underline{a}_{ij};0]$ или $\widetilde{\mathbf{a}}_{ij} = [0;\overline{a}_{ij}]$ и $\mathbf{a}_{ij} \times \mathbf{x}_j^* = \widetilde{\mathbf{a}}_{ij} \times \mathbf{x}_j^*$. Для того чтобы выполнялось равенство $\mathbf{X}^H = \mathbf{x}^*$, достаточно, а если ни один внедиагональный коэффициент $\widetilde{\mathbf{A}}$ не вырождается в 0 и ни одна интервалькомпонента $\mathbf{X}^H$ не вырождается в точку, то и необходимо, чтобы главная диагональ $\widetilde{\mathbf{A}}$ состояла из неотрицательных интервалов, а знаки коэффициентов $\widetilde{\mathbf{a}}_{ij}$ при $i \neq j$ совпадали с произведением знаков $\widetilde{\mathbf{a}}_{1i}$ и $\widetilde{\mathbf{a}}_{1j}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.

2. *Ляшко М.А.* О совпадении интервальной оболочки объединенного множества решений ИСЛАУ с итерационным решением. Балашов, 1996. 16 с. Деп. В ВИНИТИ 08.02.96, № 429 – В96.

УДК 519.21

А. Ю. Митрофанов

КОЭФФИЦИЕНТ ЭРГОДИЧНОСТИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Применению коэффициентов эргодичности для оценивания устойчивости стационарных распределений конечных однородных цепей Маркова посвящены работы [1, 2] (см. также [3] и обзор [4]). В работе [1] получена оценка устойчивости стационарного распределения цепи Маркова, выраженная через коэффициент эргодичности $\tau_1(P)$ матрицы вероятностей переходов P. При этом предполагается, что $\tau_1(P) < 1$. В настоящей статье для апериодических цепей Маркова, у которых существует единственное стационарное распределение, получено обобщение этой оценки.

Пусть $X = \{X_n,\ n = 0, 1, \ldots\}$ и $\widetilde{X} = \{\widetilde{X}_n,\ n = 0, 1, \ldots\}$ – цепи Маркова с пространством состояний $S = \{1, \ldots, N\}$, матрицами вероятностей переходов соответственно P и $\widetilde{P}$ и единственными стационарными распределениями $\pi = (\pi_i)$ и $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\pi}_i)$. Определим коэффициент эргодичности $\tau_1(B)$ вещественной $m \times n$-матрицы $B = (b_{ij})$:

$$\tau_1(B) = \frac{1}{2} \max_{i,j} \sum_{k=1}^{n} | b_{ik} - b_{jk} |. \qquad (1)$$

Знаком $\|\cdot\|$ обозначим ℓ_1-норму (сумму модулей компонент) для векторов и ∞-норму (максимальную строчную сумму модулей элементов) для матриц. Величина $\|\widetilde{\pi} - \pi\|$ равна расстоянию по вариации между распределениями $\widetilde{\pi}$, π: $\|\widetilde{\pi} - \pi\| = 2 \sup_{A \subseteq S} | \widetilde{\pi}(A) - \pi(A) |$, где $\pi(A) = \sum_{k \in A} \pi_k$, $\widetilde{\pi}(A) = \sum_{k \in A} \widetilde{\pi}_k$. Векторы будем считать вектор-строками.