БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Seneta E.* Perturbation of the stationary distribution measured by ergodicity coefficients // Adv. Appl. Probab. 1988. Vol. 20. P. 228–230.

2. *Seneta E.* Sensitivity analysis, ergodicity coefficients, and rank-one updates for finite Markov chains // Numerical solution of Markov chains. N. Y.: Marcel Dekker, 1991. P. 121–129.

3. *Seneta E.* Sensitivity of finite Markov chains under perturbation // Stat. Probab. Lett. 1993. Vol. 17. P. 163–168.

4. *Cho G.E., Meyer C.D.* Comparison of perturbation bounds for the stationary distribution of a Markov chain // Linear Algebra Appl. 2001. Vol. 335. P. 137–150.

5. *Rosenthal J.S.* Convergence rates of Markov chains // SIAM Rev. 1995. Vol. 37. P. 387–405.

6. *Лоэв М.* Теория вероятностей. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

УДК 519.212

В. Н. Михайлов, С. А. Точилкина

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРНОЙ ФУНКЦИИ ОТ НЕЗАВИСИМЫХ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В работе [1] был предложен алгоритм расчета распределения функции от независимых дискретных случайных величин. Покажем, что этот алгоритм может быть обобщен на вычисление совместного закона распределения нескольких функций от случайных величин.

Пусть в вероятностном пространстве (Ω,F,P) определены независимые дискретные случайные величины $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$. Введем обозначения: $X_j=\{x_1^j,x_2^j,\ldots,x_{m_j}^j\}$ – множество всех возможных значений случайной величины ξ_j, $j=\overline{1,n}$; $\mathbf{X}=X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ – декартово произведение этих множеств; $m=m_1\cdot m_2\cdots m_n$ – мощность множества $\boldsymbol{X}$; $\boldsymbol{x}=(x^1,x^2,\ldots,x^n)$ – точка в $\boldsymbol{X}$. Будем считать, что известны законы распределения случайных величин $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$, т.е. известны вероятности $P\{\xi_j=x\}$, $\forall x\in X_j$, $j=\overline{1,n}$.

Рассмотрим в этом же вероятностном пространстве случайный вектор $\eta=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_r)$, компоненты которого являются измеримыми функциями от независимых дискретных случайных величин $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$: $\eta_1=f_1(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$, $\eta_2=f_2(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$, $\ldots$, $\eta_r=f_r(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$.

Обозначим через $\boldsymbol{f}(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ векторную функцию как упорядоченную совокупность соответствующих функций $f_1(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$, $f_2(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$, $\ldots$, $f_r(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$. Тогда случайный вектор $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{f}(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$.

Необходимо по распределениям $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ найти совместный закон распределения случайных величин $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_r$, или, что одно и то же, закон распределения случайного вектора $\eta=\boldsymbol{f}(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$.

Если $x=(x^1,x^2,\dots,x^n)$ – фиксированная точка в X, то вследствие независимости случайных величин $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ будем иметь [2]

$$P\{\eta_1 = f_1(x), \eta_2 = f_2(x), \dots, \eta_r = f_r(x)\} =$$
$$= P\{\xi_1 = x^1, \xi_2 = x^2, \dots, \xi_n = x^n\} = P\{\xi_1 = x^1\} \cdot P\{\xi_2 = x^2\} \cdots P\{\xi_n = x^n\}. \quad (1)$$

Таким образом, в каждой точке $x \in X$ можно вычислить значения случайных величин $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_r$ и по формуле (1) определить их совместную вероятность.

Обозначим через: $Y_j=\{ y_1^j, y_2^j, \dots, y_{s_j}^j \}$ – множество всех возможных значений случайной величины η_j, $j=\overline{1,r}$; $Y=Y_1\times Y_2\times\ldots\times Y_r$ и $y=(y^1,y^2,\dots,y^r)$, $y \in Y$, $s=s_1 \cdot s_2 \cdots s_r$ – мощность множества Y.

Введем операцию упорядочивания точек пространства Y. Рассмотрим две точки $a=(a^1,a^2,\dots,a^r)$, $b=(b^1,b^2,\dots,b^r)$ пространства Y. Будем считать, что

$$a = b, \quad \text{если} \quad a^1 = b^1, a^2 = b^2, \dots, a^r = b^r;$$
$$a < b, \quad \text{если} \quad \exists i: 1 \le i \le r \;\; a^1 = b^1, a^2 = b^2, \dots, a^{i-1} = b^{i-1}, a^i < b^i. \quad (2)$$

Обозначим через $Y'=\{y'_1,y'_2,\dots, y'_l\}$ – множество всех различных значений случайного вектора η ($y'_j<y'_{j+1}$). Тогда $Y' \subseteq Y$, причем выполняются неравенства $l\le s$ и $l\le m$. Заметим, что в множестве Y' нет одинаковых точек, все они строго упорядочены в указанном выше смысле.

Для построения закона распределения случайного вектора η необходимо найти вероятности $P\{\eta_1= y'^1_j, \eta_2= y'^2_j, \dots, \eta_r= y'^n_j\}$ или $P\{\eta=y'_j\}$ для всех точек $y'_j=(y'^1_j, y'^2_j, \dots, y'^r_j) \in Y'$. Пусть

$$i=(i_1,i_2,\dots,i_n), \quad i_k\in \{1,2,\dots,m_k\}, \quad k=\overline{1,n},$$
$$M(y'_j) = \{i : f(x^1_{i_1}, x^2_{i_2}, \dots, x^n_{i_n}) = y'_j\} = \{i : f_1(x^1_{i_1}, x^2_{i_2}, \dots, x^n_{i_n}) = y'^1_j,$$
$$f_2(x^1_{i_1}, x^2_{i_2}, \dots, x^n_{i_n}) = y'^2_j, \dots, f_r(x^1_{i_1}, x^2_{i_2}, \dots, x^n_{i_n}) = y'^r_j\} -$$

множество индексов $i_1,i_2,\dots,i_n$ таких точек $x = (x^1_{i_1}, x^2_{i_2}, \dots, x^n_{i_n})$ из X, в которых векторная функция f принимает одинаковые значения в смысле определения (2). Используя свойство (1), получаем

$$P\{\eta = y'_j\} = \sum_{i\in M(y'_j)} \left(P\{\xi_1 = x^1_{i_1}\} \cdot P\{\xi_2 = x^2_{i_2}\} \cdots P\{\xi_n = x^n_{i_n}\}\right), \; j = \overline{1,l}. \quad (3)$$

Таким образом, принципиально задача о нахождении распределения случайного вектора решена: необходимо вычислить в каждой точке x из m точек пространства X значения векторной функции $f(x)$, найти по формуле (1) вероятности этих значений, затем найти точки, в которых эта функция принимает одинаковые значения, и по формуле (3) вычислить необходимые вероятности. Если проводить вычисления непосредственно по этой схеме, то потребуется $(r+1)\cdot m$ ячеек памяти для хранения значений векторной функции и соответствующих вероятностей, для определения одинаковых значений f придется сортировать массив из m записей длины n. Приведем более эффективный алгоритм вычисления закона распределения векторной функции от независимых дискретных случайных величин.

Алгоритм.

Элементы массива $M1$ предназначены для хранения векторов – вычисленных значений векторной функции f, в массиве $P1$ формируются соответствующие значения вероятностей. Все шаги алгоритма повторяются в цикле m раз. Рассмотрим ситуацию после k циклов. В массиве $M1$ находятся в возрастающем порядке все различные значения функции f в точках, вычисленных на первых k циклах. В массиве $P1$ находятся соответствующие вероятности этих значений.

Шаг 1. Формируется очередная точка $\mathbf{x}$ пространства $\mathbf{X}$. Вычисляется значение $\mathbf{y}'=f(\mathbf{x})$. По формуле (1) вычисляется вероятность $p=P\{\eta=\mathbf{y}'\}$.

Шаг 2. Методом бинарного поиска [2, с. 484] в массиве $M1$ ищется элемент $M1(j)$, равный $\mathbf{y}'$. Если такой элемент существует, то в массиве $P1$ к вероятности, хранящейся в $P1(j)$, прибавляется вероятность p, переход к шагу 1. Если элемента, равного $\mathbf{y}'$, не существует, то находят два таких элемента, что $M1(j)<\mathbf{y}'<M1(j+1)$, тогда все элементы массива $M1$ и массива $P1$, начиная с $j+1$ элемента, смещаются на один вниз. На место элемента $M1(j+1)$ помещается значение $\mathbf{y}'$, а на место элемента $P1(j+1)$ – вероятность p этого значения. Переход к шагу 1.

После выполнения m циклов в массиве $M1$ в возрастающем порядке будут сформированы все различные значения случайного вектора η, а в массиве $P1$ соответствующие вероятности.

Для оценки вычислительной сложности алгоритма рассмотрим частный случай: все независимые случайные величины имеют одинаковое распределение, и число различных возможных значений каждой из них равно k. Тогда $m=k^n$ – число точек, в которых необходимо вычислить функцию $f(\mathbf{x})$. Отсюда следует, что алгоритм вычисления распределения функций от дискретных случайных величин является экспоненциальным [4] и, следовательно, может быть применен для небольшого числа случайных величин.

По предлагаемому алгоритму составлена стандартная программа на языке ФОРТРАН, которая вычисляет распределение для заданной системы функций и известных законов распределения независимых дискретных случайных величин. Приведем тестовый пример. Векторная функция от случайных величин и распределения ξ_1, ξ_2, ξ_3 имеют следующий вид:

$$\eta_1=\xi_1+\xi_2+\xi_3,\quad \eta_2=\xi_1-\xi_2-\xi_3,\quad \eta_3=\xi_1\cdot\xi_2\cdot\xi_3.$$

ξ_1	0	1
P	0.3	0.7

ξ_2	0	1
P	0.4	0.6

ξ_3	-1	0	1
P	0.2	0.5	0.3

Получено следующее распределение случайного вектора:

η			P
η_1	η_2	η_3	
-2	2	0	0.02400
-1	1	0	0.09600
-1	3	1	0.05600
0	0	0	0.12600
0	2	1	0.22400
1	-1	0	0.05400
1	1	1	0.29400
2	0	1	0.12600

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Михайлов В.Н., Точилкина С.А.* Метод расчета закона распределения функции от дискретных случайных величин // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып.3. С. 86 – 89.

2. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М.: Физматгиз, 1961.

3. *Кнут Д.* Искусство программирования для ЭВМ. М.: Мир, 1978. Т.3: Сортировка и поиск.

4. *Гудман С., Хидетниеми С.* Введение в разработку и анализ алгоритмов. М.: Мир, 1981.

УДК 681.306, 658.512.22

В. В. Мозжилкин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА НАМОТКИ ЛЕНТЫ*

Процесс намотки ленты применяется для упрочнения деталей. При намотке лента обертывается вокруг оправки в виде прилегающих друг к другу полос или по какому-то повторяющемуся рисунку до полного покрытия поверхности оправки. Последовательные слои наносятся под одним и тем же или под разными углами намотки, пока не будет набрана нужная толщина. Угол намотки может изменяться от очень малого – продольного до большого – окружного, т. е. около 90° относительно оси оправки, включая любые углы спирали в этом интервале.

Рассмотрим задачу намотки ленты, где рисунок намотки удовлетворяет следующим условиям:

1) минимальное расстояние между соседними витками спирали без их наложения друг на друга;

* Работа выполнена в рамках программы «Государственная поддержка региональной научно-технической политики высшей школы и развитие её научного потенциала».