Получено следующее распределение случайного вектора:

η			P
η_1	η_2	η_3	
-2	2	0	0.02400
-1	1	0	0.09600
-1	3	1	0.05600
0	0	0	0.12600
0	2	1	0.22400
1	-1	0	0.05400
1	1	1	0.29400
2	0	1	0.12600

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Михайлов В.Н., Точилкина С.А.* Метод расчета закона распределения функции от дискретных случайных величин // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып.3. С. 86 – 89.

2. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М.: Физматгиз, 1961.

3. *Кнут Д.* Искусство программирования для ЭВМ. М.: Мир, 1978. Т.3: Сортировка и поиск.

4. *Гудман С., Хидетниеми С.* Введение в разработку и анализ алгоритмов. М.: Мир, 1981.

УДК 681.306, 658.512.22

В. В. Мозжилкин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА НАМОТКИ ЛЕНТЫ*

Процесс намотки ленты применяется для упрочнения деталей. При намотке лента обертывается вокруг оправки в виде прилегающих друг к другу полос или по какому-то повторяющемуся рисунку до полного покрытия поверхности оправки. Последовательные слои наносятся под одним и тем же или под разными углами намотки, пока не будет набрана нужная толщина. Угол намотки может изменяться от очень малого – продольного до большого – окружного, т. е. около 90° относительно оси оправки, включая любые углы спирали в этом интервале.

Рассмотрим задачу намотки ленты, где рисунок намотки удовлетворяет следующим условиям:

1) минимальное расстояние между соседними витками спирали без их наложения друг на друга;

* Работа выполнена в рамках программы «Государственная поддержка региональной научно-технической политики высшей школы и развитие её научного потенциала».

2) из конструктивных соображений задан диапазон допустимых углов осевой линии ленты

$$\varphi_{\min} \le \varphi \le \varphi_{\min};$$

3) из конструктивных соображений задан диапазон допустимых углов пересечений осевой линии различных слоев ленты

$$\varphi^{a}{}_{\min} \le \varphi^{a} \le \varphi^{a}{}_{\min};$$

4) минимальная длина наматываемой ленты.

Предположим, что компьютерная модель процесса намотки позволяет представить осевую линию намотанной ленты в виде совокупности точек

$$\{x_i, y_i, z_i \mid i = 0,1,..,Q\}. \tag{1}$$

Построение этого множества, а также формализация условий на углы намотки и углы пересечений осевых линий соседних слоев ленты, а следовательно, постановка и решение оптимизационной задачи существенным образом зависит от способа приближенного построения спирали наматываемой ленты. Построение геометрии наматывания ленты будем осуществлять для параметрической поверхности

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v), \tag{2}$$

причем координаты базовых точек (1) поверхности заданы как дискретное множество

$$\{\bar{r}_{ij} \mid i = 0,1,...,N, j = 0,1,...,M\}.$$

Такой подход позволяет включить модуль построения и визуализации процесса намотки в любую систему САПР.

Рассмотрим несколько подходов к решению задачи построения рисунка намотки.

Треугольные линейные конечные элементы широко используются для визуализации поверхностей в машинной графике, выполнения сложных расчетных работ. Алгоритм построения геометрии намотки здесь достаточно прост. Он сводится к элементарным вычислениям пересечений сторон ленты со сторонами элементов. Здесь триангуляция не применяется для конечно-элементной интерполяции, поэтому требование, чтобы треугольники не имели тупых углов необязательно. Тогда триангуляцию легко осуществить на четырехугольнике $\{(u_{i+k}, v_{j+l}) \mid k = 0,1; l = 0,1\}$, используя любую его диагональ. Условия неприлегания ленты и максимально возможные деформации определяются элементарно по длине ломаных линий, перпендикулярных оси ленты.

Этот алгоритм легко обобщается на случай аппроксимации поверхности лоскутами Кунса [1].

Рассмотрим подход, основанный на отображении прямоугольника с длинами сторон $s<<1$, $d<<1$ на поверхность детали. Предположим, что сторона s соответствует боковой стороне ленты, а левый верхний угол элемента касается поверхности в точке O: $\bar{r}_0 = (X_0, Y_0, Z_0) = \bar{r}(u_0, v_0)$. Без потери общности можно положить $u_0 = 0, v_0 = 0$. Тогда фрагмент поверхности (2) в окрестности данной точки можно представить в виде

$$\bar{r} = \sum_{i+j \le 2} a_{ij} u^i v^j . \tag{3}$$

Пусть τ – касательный вектор к поверхности детали в точке O, ориентированный по боковой стороне ленты, ν – ортогональный τ вектор в касательной плоскости.

Из уравнения плоскости, проходящей через точку O и вектор, ортогональный вектору ν, и уравнения (3) получаем связь параметров u и v вдоль отображения стороны s на поверхность детали

$$\sum_{i+j \le 2}^{2} \bar{\nu} a_{i,j} u^i v^j = \bar{\nu} \bar{r}_0 . \tag{4}$$

Отсюда легко найти связь параметров в виде отрезка ряда

$$v = v_0 + v_1 u + v_2 u^2 .$$

Уравнение стороны легко представить в виде

$$\bar{r} = b_0 + b_1 u + b_2 u^2 . \tag{5}$$

Тогда для определения u – координаты отображения стороны длины s имеем соотношение

$$s \approx (b_1^2 + 2 b_1 b_2 u) u . \tag{6}$$

Представляя решение этого уравнения в виде отрезка ряда $u = c_0 + c_1 s + c_2 s^2$, получим из (6) следующие соотношения

$$c_0 = 0,\ c_1 = 1 / b_1^2,\ \ c_2 = -b_1 b_2 c_1 / b_1^2 .$$

Аналогично можно построить кривую, идущую в направлении $\bar{\nu}$. Однако целесообразно провести геодезическую из точки O в данном направлении. Сформулируем начальные условия для уравнения геодезической. Очевидно $v(0)=0$. Кроме того, геодезическая в точке O должна быть ортогональна направлению τ:

$$\frac{d\bar{r}}{du} \bar{\tau} = 0 .$$

Отсюда получаем начальные условия для уравнения геодезической

$$v(0) = 0, \quad \left(\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{du}} \right)_{u=0} = - \frac{\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u} \bar{\tau}}{\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial v} \bar{\tau}} = g_1 . \tag{7}$$

Решение задачи Коши строим в виде отрезка ряда

$$v = g_1 u + g_2 u^2 . \tag{8}$$

Выбираем дугу геодезической длиной d. Расчетные формулы для определения u – координаты левого конца геодезической строятся аналогично (6).

С помощью переразложения соотношений (3) – (8) легко построить образы на поверхности детали остальных сторон элементарного прямоугольника и найти точку их пересечения. Тогда по оценке деформации сторон можно построить условия неприлегания ленты и максимума деформации. Учет толщины ленты элементарен.

С помощью предельного перехода $s,d \to 0$ можно получить дифференциальные соотношения, описывающие локальное отображение ленты на поверхность детали. Но для расчета процесса тогда придется строить дискретную модель, основанную на полиномиальных интерполяционных зависимостях. Предложенный подход, основанный на локальных разложениях, фактически представляет собой аналогичную расчетную схему.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Фокс А., Пратт М.* Вычислительная геометрия. М.: Мир, 1982.

УДК 519.4

В. А. Молчанов

НЕСТАНДАРТНАЯ КОНСТРУКЦИЯ ЯДРА СВОБОДНОЙ ПРОКОНЕЧНОЙ ПОЛУГРУППЫ*

В основе исследования комбинаторных аспектов теории формальных языков логико-алгебраическими методами лежит известное соответствие Эйленберга [1] между потоками распознаваемых языков и псевдомногообразиями (то есть SHP_{fin}-замкнутыми классами) конечных полугрупп. В работе [2] с помощью методов нестандартного анализа [3] автором получен аналог известной теоремы Биркгофа о структурной характеристике многообразий, который показывает, что псевдомногообразия являются классами конечных полугрупп, аксиоматизируемыми нестандартными тождествами. На основе нестандартной конструкции пополнений равномерных алгебраических систем [4] над каждым псевдомногообразием полугрупп V для произвольного множества A естественно определяется свободный объект $F_V(A)$, который является проконечной (то есть компактной и вполне несвязной) полугруппой и который полностью характеризует A-порожденные полугруппы псевдомногообразия V. Исследования Дж. Альмейды, М. Волкова, Н. Релли и других показывают, что ядра (то есть наименьшие замкнутые идеалы) таких полугрупп играют важную роль в изучении проблемы аксиоматизации псевдомногообразий. В на-

* Работа выполнена при поддержке INTAS, грант № 99-1224.