для которого ${}^{*}L = {}^{*}\lambda^{-1}(P)$. Так как $\varepsilon \subset {}^{*}\sigma_L$, то по третьей теореме об изоморфизмах [5] для канонического гомоморфизма $\underline{\varepsilon} : {}^{*}W \to F(A)$ существует такой гомоморфизм $f : F(A) \to S$, что ${}^{*}\lambda = f \circ \underline{\varepsilon}$. Отсюда следует, что

$$ {}^{*}L = {}^{*}\lambda^{-1}(P) = \underline{\varepsilon}^{-1}(f^{-1}(P)), \quad \underline{\varepsilon}({}^{*}L) = f^{-1}(P), \quad {}^{*}L/\varepsilon = f^{-1}(P). $$

Очевидно также, что L – идеал полугруппы W в том и только том случае, если P – идеал полугруппы S. Следовательно, ядро $K_{F(A)}$ можно представить в виде

$$ K_{F(A)} = \cap \{ f^{-1}(P) : f : F(A) \to S \text{ – конечная полугруппа, } P \subset S \text{ и } K_{F(A)} \subset f^{-1}(P) \}. $$

Поскольку для таких подмножеств P по лемме 1 $K_S = f(K_{F(A)}) \subset P$, то в силу следствия 1 и формулы (1) выполняются равенства

$$ K_{F(A)} = \cap \{ f^{-1}(P) : \ f : F(A) \to S \text{ – конечная полугруппа и } P \text{ – идеал } S \} = $$
$$ = \cap \{ {}^{*}L/\varepsilon : \ L \text{ – распознаваемый идеал полугруппы } W \} = $$
$$ = \cap \{ {}^{*}(w)/\varepsilon : \ w \in W \} = M/\varepsilon. $$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Лаллеман Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения. М.: Мир, 1985.
2. *Molchanov V.A.* Nonstandard characterization of pseudovarieties // Algebra Universalis. 1995. Vol. 33. P. 533 – 547.
3. *Альбеверио С., Фенстад Й., Хеэг-Крон Р., Линдстрем Т.* Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. М.: Мир, 1990.
4. *Молчанов В.А.* Нестандартные расширения равномерных алгебраических систем // Сибирский математический журнал. 1994. Т. 35, № 5. С. 1094 – 1105.
5. *Кон П.* Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968.

УДК 513.88

Е. В. Назарова

О РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЯДРАМИ, РАЗРЫВНЫМИ НА ДИАГОНАЛЯХ*

В пространстве $L_2[0;1]$ рассматривается интегральный оператор

$$ Af(x) = \alpha_1 \int_0^x A_1(x,t) f(t)dt + \alpha_2 \int_x^1 A_2(x,t) f(t)dt + $$
$$ + \alpha_3 \int_0^{1-x} A_3(1-x,t) f(t)dt + \alpha_4 \int_{1-x}^1 A_4(1-x,t) f(t)dt. \tag{1} $$

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00075, и программы «Ведущие научные школы», проект № 00-15-96123.

Предположим, что $A_i(x,t)$ для $i=1$ и $i=3$ непрерывно дифференцируемы по x при $t \le x$, а $A_i(x,t)$ для $i=2$ и $i=4$ непрерывно дифференцируемы по x при $t \ge x$ и выполняются соотношения $\frac{\partial^j}{\partial x^j} A_i(x,t)\big|_{t=x} = \sigma_{j,0}$ ($j=0;1$), где σ – символ Кронекера.

Оператор (1) рассматривался ранее А.П. Хромовым. В работе [1] им были получены формулы обращения оператора (1), а в работе [2] для частного случая оператора (1) установлена равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям и в тригонометрический ряд Фурье.

В настоящей статье получается интегральное уравнение для резольвенты Фредгольма оператора A, приводятся оценки резольвент для вспомогательных операторов и устанавливается равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям оператора A и дифференциального оператора L_0.

Введем в рассмотрение следующие дифференциальные операторы с краевыми условиями:

$$L_0 y = P^{-1} y', \qquad U(y) = 0;$$

$$L_1 y = P^{-1} y', \qquad V(y) = 0;$$

$$Ly = (E+S)^{-1} P^{-1} y', \; V(y) = 0,$$

где $P^{-1} f(x) = \beta_1 f(x) + \beta_2 f(1-x)$; $S = P^{-1}(DA + \alpha A)$, D – оператор дифференцирования, E – единичный оператор; $U(y) = \gamma_1 y(0) + \gamma_2 y(1)$; $V(y) = U(y) - (y,\varphi)$; $\gamma_1 = 1 + \frac{1}{\delta}[(\alpha_1 - \alpha_2)\widetilde{A}(0) + (\alpha_3 - \alpha_4)\widetilde{A}(1)]$;

$\gamma_2 = \frac{1}{\delta}[(\alpha_1 - \alpha_2)\widetilde{A}(1) + (\alpha_3 - \alpha_4)\widetilde{A}(0)]$; $\widetilde{A}(t) = A(0,t) + \int_0^1 A(0,\tau) N(\tau,t)\, d\tau$;

$N = (E+S)^{-1} - E$; $\delta = \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\alpha_3 - \alpha_4)^2}$;

$$(y,\varphi) = \frac{1}{\delta}\Big[(\alpha_2 - \alpha_1)\int_0^1 \widetilde{A}_t{}'(t) y(t)\, dt + (\alpha_3 - \alpha_4)\int_0^1 \widetilde{A}_t{}'(1-t) y(t)\, dt\Big].$$

Обозначим $R_{0,\lambda} = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ резольвенту оператора L_0, а $R_{1,\lambda}$ и R_λ – соответственно резольвенты операторов L_1 и L. Легко заметить, что R_λ является также резольвентой Фредгольма оператора A.

Справедливы следующие результаты:

ТЕОРЕМА 1. Если λ таково, что $R_{0,\lambda}$ существует, то

$$Z(x) = \{z_1(x), z_2(x)\}^T, \text{ где } z_1(x) = R_{0,\lambda} f(x);\; z_2(x) = z_1(1-x),$$

удовлетворяет системе

$$Z'(x) + \lambda B Z(x) = BF(x),$$
$$PZ(0) + QZ(1) = 0,$$

где $B = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_4 - \alpha_3 \\ \alpha_3 - \alpha_4 & \alpha_2 - \alpha_1 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}$;

$F(x) = \{f(x); f(1-x)\}^T$.

ТЕОРЕМА 2. Если $\Delta^{-1}(\lambda)$ существует, то

$$R_{1,\lambda} f = R_{0,\lambda} f + (G_{11} + G_{12})(R_{0,\lambda} f, \varphi),$$

где G_{11} и G_{12} – компоненты матрицы $G = -W(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)$;

$W(x,\lambda) = \begin{pmatrix} (\alpha_3 - \alpha_4) e^{\lambda\sqrt{\delta}x} & (\alpha_3 - \alpha_4) e^{-\lambda\sqrt{\delta}x} \\ (\alpha_1 - \alpha_2 - \sqrt{\delta}) e^{\lambda\sqrt{\delta}x} & (\alpha_1 - \alpha_2 + \sqrt{\delta}) e^{-\lambda\sqrt{\delta}x} \end{pmatrix}$;

$\Delta(\lambda) = PW(0,\lambda) + QW(1,\lambda) - T(\lambda)$;

$T(\lambda) = (\alpha_3 - \alpha_4) \begin{pmatrix} (e^{\lambda\sqrt{\delta}x}, \varphi) & (e^{-\lambda\sqrt{\delta}x}, \varphi) \\ (e^{\lambda\sqrt{\delta}x}, \varphi) & (e^{-\lambda\sqrt{\delta}x}, \varphi) \end{pmatrix}$.

ТЕОРЕМА 3. Для $y(x) = R_\lambda f(x)$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} y(x) &= R_{1,\lambda} f(x) + y(0) R_{1,\lambda}[\beta_1 N(x,0) + \beta_2 N(x,1)] + \\ &+ y(1) R_{1,\lambda}[-\beta_1 N(x,1) - \beta_2 N(x,0)] + \\ &+ R_{1,\lambda} \int_0^1 [\beta_1 N_t'(x,t) - \beta_2 N_t'(x,1-t)] y(t)\, dt, \end{aligned}$$

где $N(x,t)$ – ядро интегрального оператора N такого, что $(E+S)^{-1} = E + N$.

Обозначим:

$a_{11} = \gamma_1(\alpha_3 - \alpha_4) + \gamma_2(\alpha_1 - \alpha_2 - \sqrt{\delta})$; $a_{12} = \gamma_1(\alpha_3 - \alpha_4) + \gamma_2(\alpha_1 - \alpha_2 + \sqrt{\delta})$;

$a_{21} = \gamma_2(\alpha_3 - \alpha_4) + \gamma_1(\alpha_1 - \alpha_2 - \sqrt{\delta})$; $a_{22} = \gamma_2(\alpha_3 - \alpha_4) + \gamma_1(\alpha_1 - \alpha_2 + \sqrt{\delta})$;

$b = \dfrac{a_{21}a_{12}}{a_{11}a_{22}}$; $\mu = 2\lambda\sqrt{\delta}$; $\xi = \mu - \ln b$.

Удалим из комплексной плоскости переменного ξ нули функции $1 - e^{-\xi}$ вместе с окрестностями одного радиуса $\delta_0 > 0$ и обозначим оставшуюся часть плоскости S_{δ_0}.

ТЕОРЕМА 4. В области S_{δ_0} при $\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\delta} > 0$ и при больших значениях $|\lambda|$ верны оценки:

$$\|R_{i,\lambda} f\|_\infty = O(1)\|f\|_1,$$
$$\|R_{i,\lambda} f\|_1 = O(æ(\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\delta}))\|f\|_1; \tag{2}$$

$$\|R_{i,\lambda}f\|_{\infty} = O(æ(\mathrm{Re}\lambda\sqrt{\delta}))\|f\|_{\infty}; \tag{3}$$

$$\|R_{i,\lambda}\chi\|_{\infty} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

где $i = 0;1$; $æ(y) = \dfrac{1-e^{-y}}{y}$ при $y > 0$; $\chi(x)$ – характеристическая функция отрезка $[\eta_0;\eta] \subset (0;1)$.

Для $\mathrm{Re}\lambda\sqrt{\delta} < 0$ утверждения теоремы сохраняются, лишь в (2) и (3) $\lambda\sqrt{\delta}$ заменяется на $-\lambda\sqrt{\delta}$.

Из теорем 3 и 4 получается

ТЕОРЕМА 5. В области S_{δ_0} при $x \in [\delta_1, 1-\delta_1]$, где $0 < \delta_1 < \dfrac{1}{2}$, имеет место оценка:

$$\|R_{\lambda}f - R_{0,\lambda}f\|_{C[\delta_1;1-\delta_1]} = \left[O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + O(æ^2(\mathrm{Re}\lambda\sqrt{\delta})) + O(æ(\mathrm{Re}\lambda\sqrt{\delta})\cdot e^{-\lambda\sqrt{\delta}\delta_1})\right]\cdot\|f\|_1.$$

Теоремы 3, 4 и 5 приводят к следующему основному результату (теорема равносходимости).

ТЕОРЕМА 6. Для любой функции $f(x) \in L_1[0;1]$ и $x \in [\delta_1;1-\delta_1]$ имеет место соотношение

$$\lim_{r\to\infty}\left\|\int_{|\lambda|=r}(R_{\lambda} - R_{0,\lambda})f d\lambda\right\|_{C[\delta_1,1-\delta_1]} = 0.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Корнев В.В., Хромов А.П.* Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Мат. заметки. 1998. Т. 64, вып. 6. С. 932 – 942.
2. *Хромов А.П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сб. 1981. Т. 114 (156). № 3. С. 378 – 405.

УДК 519.4

С. И. Небалуев

ГРУППЫ ГОМОЛОГИЙ ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТОЛЕРАНТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Рассмотрим множество $\Lambda^q = \{0,1,\ldots,q\}$, где $q \in \mathrm{N}\cup\{0\}$ как толерантные пространства, в которых все элементы попарно толерантны. Другими словами, толерантные пространства (Λ^q, τ_q) состоят из одного класса толе-