УДК 517.51

В. В. Новиков

КРИТЕРИЙ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПРОЦЕСА ЛАГРАНЖА С УЗЛАМИ В НУЛЯХ МНОГОЧЛЕНОВ ЧЕБЫШЕВА 2 РОДА*

Пусть $C[-1,1]$ – множество действительных, непрерывных на $[-1,1]$ функций f, снабженное равномерной нормой $\| f \| = \sup\{|f(t)|: t\in[-1,1]\}$. Обозначим через $L_n(U,f,x)$ многочлен Лагранжа, интерполирующий f в узлах $U = \{t_{k,n}= \cos(\pi k/(n+2)),\ k = 1,\dots, n+1,\ n=1,2,\dots\}$, служащих нулями многочленов Чебышева 2 рода $U_{n+1}(x) = (1-x^2)^{-1/2}\sin(n+2)\arccos x$. Для произвольных $f\in C[-1,1]$, $n\ge 3$ и $0<\varepsilon<1$ положим

$$F(x)=f(x)(1-x^2)^{1/2},\qquad t_{j,n}= \cos(\pi j/(n+2)),\ j=-n-1,\dots, n+1,$$

$$R_{n,\varepsilon}(F)=\max\left|\sum_{k=-[n/2]+1}^{[n/2]-1}{}' \frac{F(t_{2k+1,n})-2F(t_{2k,n})+F(t_{2k+1,n})}{\varphi(2k,n,p)}\right|,$$

где

$$\varphi(m,n,p)=\begin{cases} p-m, & \text{если}\quad |p-m|\le 3([n/2]+1),\\ 2n-(p-m), & \text{если}\quad p-n>3([n/2]+1),\end{cases}$$

и максимум берется по всем p таким, что $t_{p,n}\in[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$; штрих у знака суммы указывает на отсутствие слагаемых (не более одного) с индексами k, являющимися решением уравнения $\varphi(2k,n,p)=0$. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА. Если $f\in C[-1,1]$, $0<\varepsilon<1$, то условие

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,\varepsilon}(F)=0 \qquad (1)$$

необходимо и достаточно для равномерной сходимости к f на $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ интерполяционного процесса $\{L_n(U,f,x)\}$.

Нам потребуются следующие леммы.

ЛЕММА 1. Справедливо равенство

$$\max_{-1+\varepsilon\le x\le 1-\varepsilon}\sum_{k=1}^{n+1}|l_{k,n}(U,x)| = C_1(\varepsilon)\ln n + O(1),$$

где $l_{k,n}(U,x)=\dfrac{(-1)^{k+1}\sin(n+2)\theta\sin^2\theta_{k,n}}{(n+2)(\cos\theta-\cos\theta_{k,n})\sin\theta}\equiv G_{k,n}(\theta)$, – фундаментальные многочлены Лагранжа, соответствующие матрице узлов U. Здесь и далее $C_i(\varepsilon)$ и C_i, $i=1,2,\dots$ соответственно – абсолютные и зависящие только от ε постоянные; $x=\cos\theta$, $\theta_{k,n}=\arccos t_{k,n}$.

---

* Работа выполнена при поддержке Министерства образования России, проект Е00-1.0 – 152 - № 13.

ЛЕММА 2. Имеют место неравенства

$$0 < 1/\sin x - 1/x < (\pi/12)x \text{ при } 0 < x < \pi/2, \tag{2}$$

$$C_1 \le \sqrt{1-(t_{k,n})^2} : \sqrt{1-(t_{k+1,n})^2} \le C_2, \quad k = 1, \dots n, \quad n = 1,2,\dots . \tag{3}$$

ЛЕММА 3. Каковы бы ни были $n=1,2,\dots$, и $k = -n-1, -n, \dots, n+1$, справедливы неравенства

$$\max_{0\le\theta\le\pi}\left|B_{k,n}(\theta)\right| := \max_{0\le\theta\le\pi}\left|\frac{\sin\theta}{\sin\theta_{k,n}}G_{k,n}(\theta)\right| \le C_3 \tag{4}$$

$$\max_{\delta\le\theta\le\pi-\delta} |G_{k,n}(\theta)| \le C_2(\varepsilon),$$

$$\max_{\delta\le\theta\le\pi-\delta} \sum_{k=1}^{n} |G_{k,n}(\theta) + G_{k-1,n}(\theta)| \le C_2(\varepsilon),$$

где $\delta = \arccos(1-\varepsilon)$.

Доказательство леммы 3 аналогично доказательству леммы 2 из работы [1], если принять во внимание, что

$$B_{k,n}(\theta) = \frac{\sin(2n+3)\left((\theta-\theta_{k,n})/2\right)}{2(n+2)\sin\left((\theta-\theta_{k,n})/2\right)} - \frac{\sin(2n+3)\left((\theta+\theta_{k,n})/2\right)}{2(n+2)\sin\left((\theta+\theta_{k,n})/2\right)} \equiv$$
$$\equiv D_{n+1}(\theta-\theta_{k,n}) - D_{n+1}(\theta+\theta_{k,n}). \tag{5}$$

Лемма 1 доказывается с помощью несложной модификации известного метода оценки функции Лебега для интерполирования в узлах Чебышева 1 рода; неравенства (2) известны; наконец, оценки (3) получаются непосредственным подсчетом.

ЛЕММА 4 [3]. Если $f \in C[-1,1]$, то для любого натурального m существует алгебраический многочлен P_m степени не выше m такой, что справедливы неравенства

$$\|f - P_m\| \le C\,\omega(f, 1/n), \qquad |P'_m(x)| \le \frac{C\omega(f, 1/n)}{(1-x^2)^{1/2}}, \quad -1 < x < 1,$$

где постоянная C не зависит от n.

ЛЕММА 5. Для любой функции $f \in C[-1,1]$ равномерно по $x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$

$$f(x) - L_n(U,f,x) = 2^{-1}\sum_{k=1}^{n}\left(f(t_{k+1,n}) - f(t_{k,n})\right)l_{k,n}(U,x) + O\{\omega(f, \ln n/n)\}. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $m = [n/\ln n]+1$ и P_m – многочлен из леммы 4. Запишем

$$f(x) - L_n(U,f,x) = 2^{-1}\sum_{k=1}^{n}\left(f(t_{k+1,n}) - f(t_{k,n})\right)l_{k,n}(U,x) -$$
$$- 2^{-1}\sum_{k=1}^{n}(P_m(t_{k+1,n}) - P_m(t_{k,n}))\,l_{k,n}(U,x) +$$
$$+ 2^{-1}\sum_{k=1}^{n}\left(P_m(t_{k+1,n}) - P_m(t_{k,n})\right)\left(l_{k,n}(U,x) + l_{k+1,n}(U,x)\right) +$$

$$+\left(P_m\left(t_{n+1,n}\right)-f\left(t_{n+1,n}\right)\right)l_{n+1,n}(x)+\left(P_m\left(t_{1,n}\right)-f\left(t_{1,n}\right)\right)l_{1,n}(x)+\left(f(x)-P_m(x)\right)\equiv$$
$$\equiv 2^{-1}\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(t_{k+1,n}\right)-f\left(t_{k,n}\right)\right)l_{k,n}(U,x)+A_1+\ldots+A_5.$$

Используя для оценки величины A_1 леммы 1, 2 и 3, для оценки A_2, A_3, A_4 – леммы 3 и 4, и для A_5 – лемму 4, найдем, что $A_1+\ldots+A_5=O\{\omega(f,\ln n/n)\}$.

Доказательство теоремы. Используя представления (5), (6), неравенство (4) и обозначив $\Phi(\theta):=f(\cos\theta)|\sin\theta|$, найдем, что равномерно по $\theta\in[\delta,\pi-\delta]$ верно равенство

$$f(\cos\theta)-L_n(U,f,\cos\theta)=$$
$$=(2\sin\theta)^{-1}\sum_{k=1}^{n}\left(F\left(\cos\theta_{k+1,n}\right)-F\left(\cos\theta_{k,n}\right)\right)B_{k,n}(\theta)+O(\ln n/n)+$$
$$+O\{\omega(f,\ln n/n)\}=(2\sin\theta)^{-1}\sum_{k=-n}^{n}\left(\Phi\left(\theta_{k+1,n}\right)-\Phi\left(\theta_{k,n}\right)\right)D_{n+1}\left(\theta-\theta_{k,n}\right)+$$
$$+O\{\omega(f,\ln n/n)\}.$$

Применив, с надлежащими изменениями, к последней сумме рассуждения из работы [2, с. 56 – 58], получим соотношение

$$f(x)-L_n(U,f,x)=\frac{(-1)^p U_{n+1}(x)}{2\pi}\sideset{}{'}\sum_{k=-[n/2]+1}^{[n/2]-1}\frac{F(t_{2k+1,n})-2F(t_{2k,n})+F(t_{2k+1,n})}{\varphi(2k,n,p)}+$$
$$+O\{\omega(f,\ln n/n)\},\qquad(7)$$

из которого следует достаточность. Для доказательства необходимости условия (1) предположим, что оно не выполняется. Тогда существуют последовательности номеров $\{n_i\},\{p_i\}$ и $q>0$ такие, что

$$\left|\sideset{}{'}\sum_{k=-[n_i/2]+1}^{[n_i/2]-1}\frac{F(t_{2k+1,n_i})-2F(t_{2k,n_i})+F(t_{2k+1,n_i})}{\varphi(2k,n_i,p_i)}\right|\geq q,\ i=1,2,\ldots\qquad(8)$$

Положим $x_i=\cos\dfrac{2p_i+1}{2n_i+4}\pi$. Тогда в силу (7), (8) и того что $\left|U_{n_i+1}(x_i)\right|>1$ имеем $\overline{\lim_{i\to\infty}}\left|f(x_i)-L_{n_i}(U,f,x_i)\right|\geq\dfrac{q}{2\pi}>0$. Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Привалов А.А.* О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 2. С. 228 – 243.

2. *Привалов А.А.* Критерий равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа // Изв. вузов. Сер. Математика. 1986. № 5. С. 49 – 59.

3. *Стечкин С.Б.* Обобщение некоторых неравенств С.Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, № 5. С. 1511 – 1514.