УДК 519.4

В. Е. Новиков

РЕШЁТКИ ПОНЯТИЙ *n*-АРНЫХ ОТНОШЕНИЙ*

В настоящей статье развивается аппарат алгебры отношений В.В. Вагнера [1] с целью применения алгебраической теории *n*-арных отношений к формальному концептуальному анализу, начало которому положено в работах Р. Вилле, Б. Гантера, П. Бурмейстера и др. [2]. Разработанные методы позволяют обобщить понятие формального контекста с одноместного на многоместное множество объектов, ввести многомерное понятие с многомерным множеством атрибутов. Основные результаты работы посвящены определению условий, при которых понятия *n*-арного отношения образуют систему замыканий по включению [3]. В статье приведён пример, раскрывающий нетривиальность поставленной задачи.

Пусть $\rho \subset M_1 \times \ldots \times M_n$ – некоторое *n*-арное отношение и элементы $x_{i_1} \in M_{i_1}$, $x_{i_2} \in M_{i_2}, \ldots, x_{i_k} \in M_{i_k}$, $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$. Будем говорить, что *k*-система $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ *входит в* ρ, если существует *n*-система, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \rho$, в которой элементы $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ присутствуют в качестве соответствующих компонент. Если *k*=1, то просто говорим: элемент $x_i \in M_i$, $1 \le i \le n$, *входит в* ρ. Введём индексные векторы: вместо $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$, будем писать $\bar{i}_k$, $1 \le k \le n$, пологая $\bar{i}_1 = i_1$, и соответственно вместо $M_{i_1} \times \ldots \times M_{i_k}$ писать $M_{\bar{i}_k}$, а вместо $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ писать $x_{\bar{i}_k}$. Пусть $\rho \subset M_1 \times \ldots \times M_n$, $1 \le k \le n$ и $a_{\bar{i}_k} \in M_{\bar{i}_k}$. Тогда формула

$$\pi_{\bar{i}_k}(\rho) = \{x_{\bar{i}_k} \in M_{\bar{i}_k} \mid x_{\bar{i}_k} \textit{ входит в } \rho\}$$

будет определять *оператор проекции n-арного отношения* ρ *на базисные множества* $M_{i_1}, \ldots, M_{i_k}$, а формула

$$\sigma\{a_{\bar{i}_k}\}(\rho) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \rho \mid a_{\bar{i}_k} \textit{ входит в } (x_1, \ldots, x_n)\}$$

– *оператор выбора n-арного отношения* ρ *по k-системе* $a_{\bar{i}_k} \in M_{\bar{i}_k}$. Если $1 \le k, s \le n$ и $X \subset M_{\bar{i}_s}$, то множество $\rho_{\bar{j}_k}\langle x_{\bar{i}_s}\rangle := \pi_{\bar{j}_k}(\sigma\{x_{\bar{i}_s}\}(\rho))$ будем называть *элементарным* $\bar{j}_k$*-срезом* ρ *через* $x_{\bar{i}_s}$, а множество

$$\hat{\rho}_{\bar{j}_k}(X) := \bigcap_{x_{\bar{i}_s} \in X} \rho_{\bar{j}_k}\langle x_{\bar{i}_s}\rangle$$

---

* Работа выполнена при поддержке INTAS, грант № 99-1224.

– *дуальным* $\bar{j}_k$*-срезом* ρ *через подмножество X*. Последовательный результат дуальных срезов $\widehat{\rho}_{\bar{i}_t}(\widehat{\rho}_{\bar{j}_k}(X))$ обозначим через $\widehat{\rho}_{\bar{i}_t\bar{j}_k}(X)$.

Подмножество $X \subset M_{\bar{i}_s}$, $1 \le s \le n$ назовём $\bar{i}_s$-понятием n-арного отношения ρ, если существует $\bar{j}_k$, $1 \le k \le n$, такой, что

$$X = \widehat{\rho}_{\bar{i}_s\bar{j}_k}(X).$$

Причем $\bar{j}_k$ назовём *определяющей системой атрибутов* $\bar{i}_s$-понятия X.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пересечение двух $\bar{i}_s$-понятий n-арного отношения $\rho \subset M_1 \times \ldots \times M_n$, $1 \le s \le n$, с одной и той же определяющей системой атрибутов опять является $\bar{i}_s$-понятием этого отношения.

Следующий пример показывает, что пересечение $\bar{i}_s$-понятий с различными определяющими системами атрибутов не всегда будет $\bar{i}_s$-понятием этого отношения. Пусть $X = \{a_1; a_2; a_3\}$, $Y = \{a_2; a_3; a_4\}$, $X, Y \subset M_1$, из отношения на M_1, M_2, M_3 (рис. 1). Покажем, что они являются 1-понятиями: $\widehat{\rho}_2(X) = \{b_1\} \cap \{b_1; b_2\} \cap \{b_1; b_3\} = \{b_1\}$, $\widehat{\rho}_{12}(X) = \widehat{\rho}_1(\{b_1\}) = X$, $\widehat{\rho}_3(Y) = \{c_2; c_4\} \cap \{c_3; c_4\} \cap \{c_4\} = \{c_4\}$, $\widehat{\rho}_{13}(Y) = \widehat{\rho}_1(\{c_4\}) = Y$. Рассмотрим их пересечение $X \cap Y = \{a_2; a_3\}$. Найдём $\widehat{\rho}_2(X \cap Y) = \{b_1\}$, $\widehat{\rho}_3(X \cap Y) = \{c_4\}$, $\widehat{\rho}_{(2;3)}(X \cap Y) = \varnothing$. Откуда $\widehat{\rho}_{12}(X \cap Y) = X$, $\widehat{\rho}_{13}(X \cap Y) = Y$, $\widehat{\rho}_{1(2;3)}(X \cap Y) = M_1$. Следовательно, пересечение $X \cap Y$ не является 1-понятием. На рис. 2, 3, 4 изображены всевозможные решётки 1-понятий этого отношения соответственно с системами атрибутов (2), (3) и (2,3). На рис. 5 видно, что всё множество 1-понятий образует упорядоченное множество, не являющееся решёткой. В случае произвольного n-арного отношения ясно, что пересечение двух $\bar{i}_s$-понятий, подобных понятиям примера, не будет являться $\bar{i}_s$-понятием. Есть гипотеза обратной связи: если пересечение двух $\bar{i}_s$-понятий не является $\bar{i}_s$-понятием, то они подобны 1-понятиям данного примера.

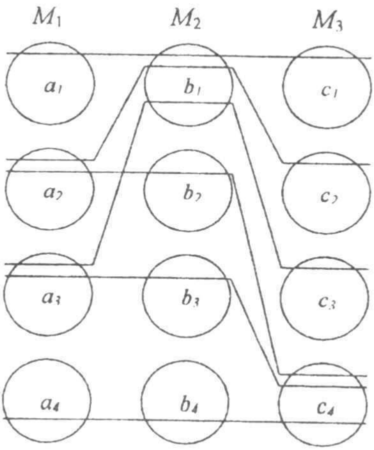

Рис. 1

Отношение $\rho \subset M_1 \times \ldots \times M_n$ назовём *частично однозначным относительно* $M_{\bar{i}_s}$, $1 \le s \le n$, если каждый элемент $x_{\bar{i}_s} \in M_{\bar{i}_s}$ входит в ρ не более одного раза.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если n-арное отношение $\rho \subset M_1 \times \ldots \times M_n$ является частично однозначным относительно $M_{\bar{i}_s}$, $1 \leq s \leq n$, то пересечение любых двух его $\bar{i}_s$-понятий опять является $\bar{i}_s$-понятием этого отношения.

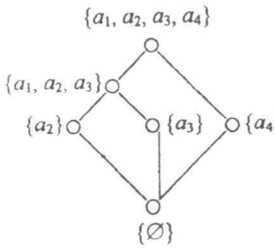

Рис. 2

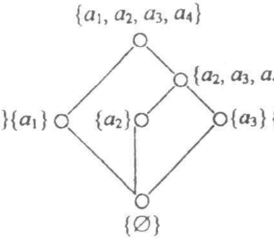

Рис. 3

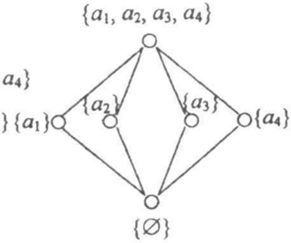

Рис. 4

Пусть $\rho \subset M_1 \times \ldots \times M_n$ частично однозначно относительно $M_{\bar{i}_s}$, $1 \leq s \leq n$, и T – множество всех $\bar{i}_s$-понятий n-арного отношений ρ. Если $X \subset M_{\bar{i}_s}$, то $J_{\bar{i}_s}(X) := \bigcap\limits_{\tau \in T \wedge X \subset \tau} \tau$ будем называть замыканием множества X.

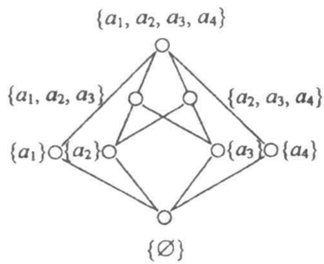

Рис. 5

ТЕОРЕМА. Оператор $J_{\bar{i}_s}$ является оператором замыкания [3] на подмножествах из $M_{\bar{i}_s}$ относительно упорядоченности по включению.

Предложение 2 и следующая за ним теорема в частности указывают, что множество всевозможных понятий по любому ключу реляционной базы данных [4] образует полную решётку.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Вагнер В.В.* Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и её приложения. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1965. Вып. 1.
2. *Wille R.* Introduction to Formal Concept Analysis. Darmstadt: Technische Hochschule Darmstadt. 1996. Oktober.
3. *Биркгоф Г.* Теория решёток. М.: Наука, 1984.
4. *Мейер Д.* Теория реляционных баз данных. М.: Мир, 1987.