УДК 519.83

М. В. Пасечник

ДЕЛЕЖИ В БЕСКОАЛИЦИОННЫХ ИГРАХ С КВАЗИУПОРЯДОЧЕННЫМИ ИСХОДАМИ

Основной задачей теории игр является выявление содержания понятия оптимальности и нахождение условий существования оптимальных решений. В теории игр сложилось два подхода к введению понятия оптимальности: некооперативный и кооперативный. Некооперативный подход базируется на предположении информационной разобщенности игроков; формально это проявляется в запрете образования коалиций. Кооперативный подход, напротив, основан на возможности образований коалиций игроков, имеющих коалиционные интересы и возможности коалиционных действий. Формально коалиция – это произвольное непустое подмножество множества игроков. Для каждой коалиции должно быть указано множество ее стратегий и отношение предпочтения, выражающее ее интересы.

Основным объектом изучения в статье является игра n лиц с квазиупорядоченными исходами, которая задается в виде

$$G = \langle N, (X_i)_{i \in N}, A, (\omega_i)_{i \in N}, F \rangle, \qquad (1)$$

где $N = \{1, \ldots, n\}$ – множество игроков, X_i – множество стратегий игрока i, A – множество исходов, ω_i – отношение квазипорядка на A, выражающее предпочтения игрока i, $F : X_N \to A$ – функция реализации, где $X_N = \prod_{i \in N} X_i$ – множество ситуаций игры. При изучении кооперативного аспекта игры (1) для каждой коалиции $S \subseteq N$ должно быть определено множество ее стратегий X_S и отношение предпочтения ω_S. Далее будем полагать, что множество стратегий коалиции S есть $X_S = \prod_{i \in S} X_i$, а отношение предпочтения определяется в виде $\omega_S = \bigcap_{i \in S} \omega_i$, которое также является отношением квазипорядка.

В кооперативной теории игр одним из важнейших понятий является понятие дележа. *Дележ* – это оптимальный по Парето индивидуально-рациональный исход. В данной статье мы обобщаем эти понятия на игры с квазиупорядоченными исходами. Наша задача установить достаточные условия для существования индивидуально-рациональных исходов и для существования дележей в играх с квазиупорядоченными исходами. Отметим, что для игр с квазиупорядоченными исходами аналогом индивидуальной рациональности исхода является его допустимость. Исход a допустим для игрока i, если у него не существует такой стратегии x_i, что при любой стратегии $y_{N \setminus i}$ дополнительной коалиции $X_{N \setminus i}$ выполняется

$F(x_i, y_{N\setminus i}) \overset{\omega_i}{>} a$. Введем на множестве стратегий X_i игрока i отношение квазипорядка β_i.

<u>Определение 1.</u> Пусть $x_i^1, x_i^2 \in X_i$. Будем говорить, что стратегия x_i^1 *доминирует стратегию* x_i^2 *по отношению* β_i *– доминирования* (обозначать $x_i^1 \overset{\beta_i}{\geq} x_i^2$), если выполняется включение

$$\left\{F(x_i^1, y) : y \in X_{N\setminus i}\right\}^{\uparrow} \subseteq \left\{F(x_i^2, y) : y \in X_{N\setminus i}\right\}^{\uparrow},$$

где знаком $\uparrow$ обозначается множество мажорант [1] соответствующего подмножества относительно квазипорядка ω_i.

<u>Определение 2.</u> Стратегия игрока i называется β_i*-максимальной*, если она является максимальным элементом множества стратегий X_i относительно квазипорядка β_i.

ТЕОРЕМА 1 (*достаточное условие существования индивидуально-рационального исхода*). Если в игре G вида (1) для каждого игрока $i \in N$ отношение β_i-доминирования удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей (ОВЦ [1]), то множество индивидуально-рациональных исходов в игре G не пусто.

При доказательстве этой теоремы используется следующая лемма.

ЛЕММА 1. В любой ситуации, в которой игрок i использует β_i-максимальную стратегию, исход игры допустим для игрока i.

Из леммы 1 следует, что в ситуации $\left(x_i^*\right)_{i\in N}$, где каждая стратегия x_i^* является β_i-максимальной, исход будет допустим для всех игроков сразу, т.е. индивидуально-рациональным. Существование такой ситуации обеспечивается условием ОВЦ в каждом квазиупорядоченном множестве $\langle X_i, \beta_i\rangle$ $(i \in N)$.

Простые примеры показывают, что исход в ситуации, состоящей из β_i-максимальных стратегий игроков может быть неоптимален по Парето, т.е. не быть дележом. Поэтому возникает дополнительная задача нахождения достаточных условий существования дележа. Одно из решений этой задачи дано в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2 (*достаточное условие непустоты множества дележей в играх с квазиупорядоченными исходами*). В игре G вида (1), в которой каждое квазиупорядоченное множество $\langle A, \omega_i\rangle_{i\in N}$ удовлетворяет условию ОВЦ, множество дележей не пусто.

Приведем примеры, показывающие что из условия ОВЦ в квазиупорядоченных множествах $\langle X_i, \beta_i\rangle$ не следует условие ОВЦ в квазиупорядоченных множествах $\langle A, \omega_i\rangle$ и наоборот.

Пример 1. Рассмотрим игру $G = \langle X, Y, A, \omega_1, \omega_2, F \rangle$ с упорядоченными исходами, в которой функция реализации задана с помощью табл. 1, а диаграммы упорядоченных множеств $\langle A, \omega_i \rangle_{i=1,2}$ приведены на рис. 1 и 2.

Таблица 1

F	y_1	y_2	y_3	y_4	…
x_1	a_1	a_2	a_3	a_4	…
x_2	a_2	a_1	a_4	a_5	…
x_3	a_3	a_4	a_1	a_6	…
x_4	a_4	a_5	a_6	a_1	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

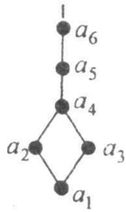

Рис. 1

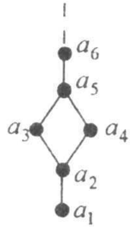

Рис. 2

В данном примере $\{F(x_1, Y)\}^{\uparrow} = \{F(x_2, Y)\}^{\uparrow} = \ldots = A$, откуда $x_1 \sim x_2 \sim \ldots$; $\{F(X, y_1)\}^{\uparrow} = \{F(X, y_2)\}^{\uparrow} = \ldots = A$, откуда $y_1 \sim y_2 \sim \ldots$. Следовательно, для упорядоченных множеств $\langle X, \beta_1 \rangle$ и $\langle Y, \beta_2 \rangle$ выполняется условие ОВЦ. Но для упорядоченных множеств $\langle A, \omega_i \rangle_{i=1,2}$ условие ОВЦ не выполняется.

Пример 2. Рассмотрим игру $G = \langle X, Y, A, \omega_1, \omega_2, F \rangle$ с упорядоченными исходами, в которой функция реализации задана с помощью табл. 2, а диаграммы упорядоченных множеств $\langle A, \omega_i \rangle_{i=1,2}$ приведены на рис. 3 и 4.

Таблица 2

F	y_1	y_2	y_3	y_4	…
x_1	a_1	a_3	a_5	a_7	…
x_2	a_3	a_5	a_7	a_9	…
x_3	a_5	a_7	a_9	a_{11}	…
x_4	a_7	a_9	a_{11}	a_{13}	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

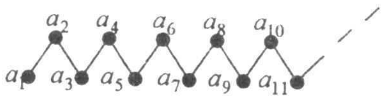

Рис. 3

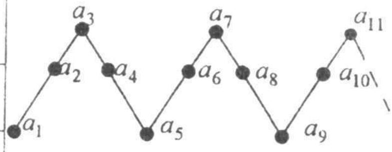

Рис. 4

Здесь упорядоченные множества $\langle A, \omega_i \rangle_{i=1,2}$ удовлетворяют условию ОВЦ, но в квазиупорядоченных множествах $\langle X, \beta_1 \rangle$ и $\langle Y, \beta_2 \rangle$ условие ОВЦ не выполняется. Действительно, так как $\{F(x_1, Y)\}^{\uparrow} \supset \{F(x_2, Y)\}^{\uparrow} \supset \ldots$, то $x_1 \overset{\beta_1}{\prec} x_2 \overset{\beta_1}{\prec} x_3 \prec \ldots$.

В квазиупорядоченном множестве $\langle Y, \beta_2 \rangle$ имеется бесконечно возрастающая цепь $y_1 \overset{\beta_2}{\prec} y_2 \overset{\beta_2}{\prec} y_4 \overset{\beta_2}{\prec} y_6 \prec \ldots$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Биркгоф Г.* Теория решёток. М.: Наука, 1984.

УДК 517.54

Е. В. Разумовская

ЗАДАЧА ГРОНУОЛЛА ДЛЯ ФУНКЦИЙ КЛАССА БАЗИЛЕВИЧА

И.Е. Базилевич [1], проинтегрировав частный вид уравнения Левнера-Куфарева, получил интегральное представление широкого класса однолистных функций, называемого классом функций Базилевича (B_α). Из [1] следует, что если $f \in B_\alpha$, то $f(z) = \lim\limits_{t\to\infty} e^t w(z,t)$, где $w(z,t)$ является решением дифференциального уравнения Левнера-Куфарева

$$\frac{dw(z,t)}{dt} = -\frac{w(z,t)}{e^{-\alpha t} p_1(w) + (1-e^{-\alpha t}) p_0(w)}, \tag{1}$$

$$w(z,o) = z,$$

где $p_0(w)$, $p_1(w)$ – функции класса Каратеодори (С) с разложением в единичном круге $p_0(w) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2\gamma_k w^k$, $p_1(w) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2\beta_k w^k$, удовлетворяющие в нем условию $\operatorname{Re} p_0(w) > 0$, $\operatorname{Re} p_1(w) > 0$.

Гронуолл [2] поставил задачу об оценке $|f(z)|$ при фиксированном значении $a_2 = f''(0)/2$ в классе однолистных функций. Мы дадим решение задачи Гронуолла в классе функций B_α с дополнительными требованиями вещественности коэффициентов α, β_1 и γ_1. Для получения оценки используется метод, предложенный в работах [3, 4].

ТЕОРЕМА. Пусть $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots \in B_\alpha, \alpha \in R$. Тогда для вещественных β_1, γ_1 справедливо неравенство

$$J_1^* \le |f(z)| \le J_2^*, \tag{2}$$

$$J_1^* = \left[\alpha \int_0^{|z|} \frac{(1-s^2)s^{\alpha-1}}{(1+s^2+s|a_2|)^{\alpha+1}} ds\right]^{1/\alpha},$$