В квазиупорядоченном множестве $\langle Y, \beta_2 \rangle$ имеется бесконечно возрастающая цепь $y_1 \overset{\beta_2}{\prec} y_2 \overset{\beta_2}{\prec} y_4 \overset{\beta_2}{\prec} y_6 \prec \ldots$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Биркгоф Г.* Теория решёток. М.: Наука, 1984.

УДК 517.54

Е. В. Разумовская

ЗАДАЧА ГРОНУОЛЛА ДЛЯ ФУНКЦИЙ КЛАССА БАЗИЛЕВИЧА

И.Е. Базилевич [1], проинтегрировав частный вид уравнения Левнера-Куфарева, получил интегральное представление широкого класса однолистных функций, называемого классом функций Базилевича (B_α). Из [1] следует, что если $f \in B_\alpha$, то $f(z) = \lim\limits_{t\to\infty} e^t w(z,t)$, где $w(z,t)$ является решением дифференциального уравнения Левнера-Куфарева

$$\frac{dw(z,t)}{dt} = -\frac{w(z,t)}{e^{-\alpha t} p_1(w) + (1 - e^{-\alpha t}) p_0(w)}, \tag{1}$$

$$w(z,o) = z,$$

где $p_0(w)$, $p_1(w)$ – функции класса Каратеодори (C) с разложением в единичном круге $p_0(w) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2\gamma_k w^k$, $p_1(w) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2\beta_k w^k$, удовлетворяющие в нем условию $\operatorname{Re} p_0(w) > 0$, $\operatorname{Re} p_1(w) > 0$.

Гронуолл [2] поставил задачу об оценке $|f(z)|$ при фиксированном значении $a_2 = f''(0)/2$ в классе однолистных функций. Мы дадим решение задачи Гронуолла в классе функций B_α с дополнительными требованиями вещественности коэффициентов α, β_1 и γ_1. Для получения оценки используется метод, предложенный в работах [3, 4].

ТЕОРЕМА. Пусть $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots \in B_\alpha, \alpha \in R$. Тогда для вещественных β_1, γ_1 справедливо неравенство

$$J_1^* \le |f(z)| \le J_2^*, \tag{2}$$

$$J_1^* = \left[\alpha \int_0^{|z|} \frac{(1 - s^2) s^{\alpha - 1}}{(1 + s^2 + s|a_2|)^{\alpha + 1}} ds \right]^{1/\alpha},$$

$$J_2^* = \left[\alpha \int_0^{|z|} \frac{2s^\alpha \left(\frac{1+s}{1-s} \right)^{\frac{1+s^2+s|a_2|(\alpha+1)}{2s}}}{e(1-s^2)^{\alpha+1} \ln \left| \frac{1+s}{1-s} \right|} ds \right]^{1/\alpha}.$$

Доказательство. Из [1] легко выводится связь между $\alpha, \beta_1, \gamma_1$ и a_2:

$$a_2 = 2\frac{\beta_1 + \gamma_1 \alpha}{\alpha + 1}.$$

Зафиксируем $a_2 = c$ и без ограничения общности будем считать $a_2 \geq 0$. Пусть $\gamma_1 = x$, $\beta_1 = \frac{c(\alpha+1)}{2} - \alpha x$. Оценим $|f(z)|$ в зависимости от параметра x.

Оператор

$$P_{d_1}[q](w) = \frac{(1+d_1)(1+w)q(w) + (1-d_1)(1-w)}{(1+d_1)(1-w)q(w) + (1-d_1)(1+w)},$$

где $q(w) \in C$ однозначно отображает класс C на класс $C(d_1)$ функций $f \in C$ с фиксированным коэффициентом d_1 [5].

Представив P_{d_1} в виде

$$P_{d_1}[q](w) = \frac{\frac{(1+d_1)q + (1-d_1)}{(1+d_1)q - (1-d_1)} + w}{\frac{(1+d_1)q + (1-d_1)}{(1+d_1)q - (1-d_1)} - w} = \frac{k+w}{k-w},$$

отметим, что функция $\xi = \frac{k+w}{k-w}$ отображает круг $E_r = \{w : |w| \leq r\}$ на круг $\left| \xi - \frac{|k|^2 + r^2}{|k|^2 - r^2} \right| \leq \frac{2|k|r}{|k|^2 - r^2}$, который расширяется с уменьшением $|k|$.

Применим оператор P_d к функциям $p_0(w)$, $p_1(w)$. Функция

$$g(w) = e^{-\alpha t} P_{\frac{c(\alpha+1)}{2} - \alpha x}[p](w) + (1 - e^{-\alpha t}) P_x[p](w)$$

отображает круг E_r на круг

$$\left| g - \left(e^{-\alpha t} \frac{|k_1|^2 + r^2}{|k_1|^2 - r^2} + (1 - e^{-\alpha t}) \frac{|k_2|^2 + r^2}{|k_2|^2 - r^2} \right) \right| \leq$$

$$\leq \left(e^{-\alpha t} \frac{2|k_1|r}{|k_1|^2 - r^2} + (1 - e^{-\alpha t}) \frac{2|k_2|r}{|k_2|^2 - r^2} \right),$$

и значит,

$$T_1 \le \operatorname{Re} g(w) \le T_2, \tag{3}$$

$$T_1 = e^{-\alpha t}\frac{|k_1|-r}{|k_1|+r} + (1-e^{-\alpha t})\frac{|k_2|-r}{|k_2|+r},$$

$$T_2 = e^{-\alpha t}\frac{|k_1|+r}{|k_1|-r} + (1-e^{-\alpha t})\frac{|k_2|+r}{|k_2|-r}.$$

Так как область значений функционала $I(p) = p(z_0)$, $p \in C$, $z_0 \ne 0$ – фиксированная точка единичного круга, представляет собой круг [6]

$$D(z_0) = \left\{ I : \left| I - \frac{1+|z_0|^2}{1-|z_0|^2} \right| \le \frac{2|z_0|}{1-|z_0|^2} \right\},$$

то

$$T_1^* = \min_{p\in C} T_1 = e^{-\alpha t}\frac{1-r^2}{1+r^2+2r\left(\dfrac{c(\alpha+1)}{2} - x\alpha\right)} + (1-e^{-\alpha t})\frac{1-r^2}{1+r^2+2rx},$$

$$T_2^* = \max_{p\in C} T_2 = e^{-\alpha t}\frac{1+r^2+2r\left(\dfrac{c(\alpha+1)}{2} - x\alpha\right)}{1-r^2} + (1-e^{-\alpha t})\frac{1+r^2+2rx}{1-r^2}.$$

Из (1) и (3) получаем неравенство

$$-\frac{1}{T_1^*} \le \frac{d\log|w|}{dt} \le -\frac{1}{T_2^*},$$

интегрирование которого приводит к неравенству

$$J_1(x) \le |f(z)| \le J_2(x), \tag{4}$$

где

$$J_1(x) = \left[\alpha \int_0^{|z|} \frac{(1-s^2)s^{\alpha-1}ds}{\left(1+s^2+2s\left(\dfrac{c(\alpha+1)}{2} - x\alpha\right)\right)\left(s^2+2sx+1\right)^{\alpha}} \right]^{1/\alpha},$$

$$J_2(x) = \left[\alpha \int_0^{|z|} \frac{\left(1+s^2+2s\left(\dfrac{c(\alpha+1)}{2} - x\alpha\right)\right)s^{\alpha-1}ds}{\left(1-s^2\right)^{\alpha+1}} \left(\frac{1+s}{1-s}\right)^{\alpha x} ds \right]^{1/\alpha}.$$

Находя максимум и минимум по x, получим основное неравенство (2).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Базилевич И.Е.* Обобщение одной интегральной формулы для подкласса однолистных функций // Мат. сб. 1964. № 100. С. 628 – 630.
2. *Gronwall T.H.* Sur la deformation dans la representations conforme sous des conditions restrictives // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris., 1916. Vol.162. P. 316 – 318.
3. *Szynal A., Szynal J., Wajler S.* On the problem of Grownwall for conwex and quasi starlike functions // Conf. Anal. Functions. Abstracts. Kozubnik, 1979. P. 56.
4. *Прохоров Д.В., Шиналь Я.* Оценка модуля функции Мокану с фиксированными начальными коэффициентами // Теория функций и приближений. Тр. Сарат. зимней шк. Саратов, 1982. Ч. 1. С. 156.
5. *Pfaltzgraff J.A., Pinchuk B.A.* Variational method for classes of meromorphic functions // J. Anal. Math. 1971. Vol. 24. P. 101 – 150.
6. *Александров И.А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976.

УДК 519.83

В. В. Розен

РЕШЁТКА ПОДКЛАССОВ КЛАССА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР*

Исследованы соотношения между подклассами класса антагонистических игр. Антагонистическая игра с упорядоченными исходами задается в виде системы

$$G = \langle X, Y, A, \omega, F \rangle,$$

где X – множество стратегий игрока 1, Y – множество стратегий игрока 2, A – множество исходов, $\omega \subseteq A^2$ – отношение порядка на A, выражающее предпочтения игрока 1, $F: X \times Y \to A$ – функция реализации. Игра, двойственная к G, получается из нее переменой мест игроков 1 и 2 и заменой порядка ω на обратный порядок ω^{-1}. Пусть K – класс всех антагонистических игр с упорядоченными исходами.

Определение 1. Игра G называется 1-*альтернативной*, если для любого исхода $a \in A$ выполняется альтернатива: исход a либо гарантируется игроком 1, либо запрещается игроком 2, т.е.

либо $(\exists x \in X)(\forall y \in Y) F(x,y) \geq^{\omega} a$, либо $(\exists y \in Y)(\forall x \in X) \neg(F(x,y) \geq^{\omega} a)$.

Класс 1-альтернативных игр обозначается через K_{al}^1. Двойственно определяется класс 2-альтернативных игр K_{al}^2. Классы K_{bal} *биальтернативных* игр и K_{al} *альтернативных* игр определяются равенствами

$$K_{bal} = K_{al}^1 \bigcap K_{al}^2, \quad K_{al} = K_{al}^1 \bigcup K_{al}^2.$$

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00053.