БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Базилевич И.Е.* Обобщение одной интегральной формулы для подкласса однолистных функций // Мат. сб. 1964. № 100. С. 628 – 630.
2. *Gronwall T.H.* Sur la deformation dans la representations conforme sous des conditions restrictives // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris., 1916. Vol.162. P. 316 – 318.
3. *Szynal A., Szynal J., Wajler S.* On the problem of Grownwall for conwex and quasi starlike functions // Conf. Anal. Functions. Abstracts. Kozubnik, 1979. P. 56.
4. *Прохоров Д.В., Шиналь Я.* Оценка модуля функции Мокану с фиксированными начальными коэффициентами // Теория функций и приближений. Тр. Сарат. зимней шк. Саратов, 1982. Ч. 1. С. 156.
5. *Pfaltzgraff J.A., Pinchuk B.A.* Variational method for classes of meromorphic functions // J. Anal. Math. 1971. Vol. 24. P. 101 – 150.
6. *Александров И.А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976.

УДК 519.83

В. В. Розен

РЕШЁТКА ПОДКЛАССОВ КЛАССА АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР*

Исследованы соотношения между подклассами класса антагонистических игр. Антагонистическая игра с упорядоченными исходами задается в виде системы

$$G = < X, Y, A, \omega, F >,$$

где X – множество стратегий игрока 1, Y – множество стратегий игрока 2, A – множество исходов, $\omega \subseteq A^2$ – отношение порядка на A, выражающее предпочтения игрока 1, $F: X \times Y \to A$ – функция реализации. Игра, двойственная к G, получается из нее переменой мест игроков 1 и 2 и заменой порядка ω на обратный порядок ω^{-1}. Пусть K – класс всех антагонистических игр с упорядоченными исходами.

<u>Определение 1.</u> Игра G называется 1-*альтернативной*, если для любого исхода $a \in A$ выполняется альтернатива: исход a либо гарантируется игроком 1, либо запрещается игроком 2, т.е.

либо $(\exists x \in X)(\forall y \in Y)F(x,y) \geq^{\omega} a$, либо $(\exists y \in Y)(\forall x \in X)\neg(F(x,y) \geq^{\omega} a)$.

Класс 1-альтернативных игр обозначается через K^1_{al}. Двойственно определяется класс 2-альтернативных игр K^2_{al}. Классы K_{bal} *биальтернативных* игр и K_{al} *альтернативных* игр определяются равенствами

$$K_{bal} = K^1_{al} \cap K^2_{al}, \; K_{al} = K^1_{al} \cup K^2_{al}.$$

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00053.

Определение 2. Игра G называется *глобально альтернативной*, если для любого мажорантно стабильного относительно порядка ω подмножества $B \subseteq A$ выполнена альтернатива

либо $(\exists x \in X)(\forall y \in Y)F(x,y) \in B$, либо $(\exists y \in Y)(\forall x \in X)F(x,y) \notin B$.

Класс глобально альтернативных игр с упорядоченными исходами обозначается через K_{gal}.

Определение 3. В игре G стратегия $x_0 \in X$ называется *дискриминирующей* стратегией игрока 1, если $F(x_0,Y) \subseteq U(2)$, где

$$U(2) = \{a \in A : (\exists y \in Y)\,(\forall x \in X)\,F(x,y) \leq^{\omega} a\} -$$

множество гарантированных исходов игрока 2.

Стратегия $x_0 \in X$ называется *критической* стратегией игрока 1, если $F(x_0,Y) \subseteq U^*(2)$, где $U^*(2) = \{a \in A : (\exists y \in Y)(\forall x \in X)F(x,y) <^{\omega} a\}$ – множество строго гарантированных исходов игрока 2.

Через K_d^1 обозначается подкласс класса K, состоящий из игр, в которых игрок 1 имеет дискриминирующую стратегию; через K_{cr}^1 – в которых игрок 1 имеет критическую стратегию. Двойственно определяются классы K_d^2 и K_{cr}^2. Полагаем

$$K_d = K_d^1 \cup K_d^2, \quad K_{cr} = K_{cr}^1 \cup K_{cr}^2.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Выполняются следующие включения:

$$K_{cr}^1 \subset K_d^1,\ K_{cr}^2 \subset K_d^2,\ K_d \subset K_{gal} \subset K_{bal}.$$

Положим K_{sp} – класс антагонистических игр, имеющих седловую точку. Мы исследуем соотношения включения между следующими подклассами класса K:

$$\{K_{al}^1, K_{al}^2, K_{al}, K_{bal}, K_{gal}, K_d^1, K_d^2, K_d, K_{cr}^1, K_{cr}^2, K_{cr}, K_{sp}, \varnothing\}. \qquad (1)$$

ТЕОРЕМА 1. А. Имеет место следующая диаграмма (рис. 1), указывающая соотношения включения между классами (1).

В. Классы (1) относительно включения образуют решётку L, которая является линейно упорядоченной суммой трёх булевых алгебр, изоморфных соответственно $2^3, 2^0, 2^2$.

С. Решётка L является $\cap$-подрешёткой булевой алгебры 2^K всех подклассов класса K. В частности,

$$K_d^1 \cap K_d^2 = K_{sp},\ \ K_d^1 \cap K_{cr}^2 = K_d^2 \cap K_{cr}^1 = \varnothing,\ K_d^1 \cap K_{cr} = K_{cr}^1,\ K_d^2 \cap K_{cr} = K_{cr}^2.$$

Замечание 1. Решетка L не является $\cup$-подрешеткой булевой алгебры 2^K. В частности, $K_{cr}^1 \cup K_{sp} \neq K_d^1$, $K_{cr}^2 \cup K_{sp} \neq K_d^2$.

Замечание 2. Для игр с конечным множеством исходов выполнено $K_{cr}^1 = K_{cr}^2 = K_{cr} = \varnothing$.

Пусть K^c – подкласс класса K, состоящий из игр, в которых упорядоченное множество исходов является полной цепью.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. В классе K^c подклассы K_{bal}, K_{gal} и K_d совпадают.

Таким образом, диаграмма подклассов (1) в этом случае принимает вид, представленный на рис. 2.

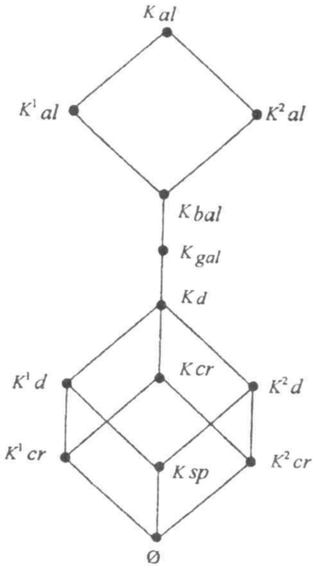

Рис. 1

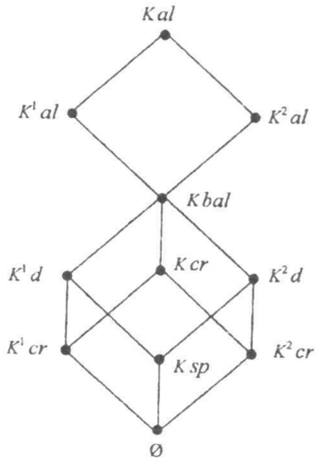

Рис. 2

ТЕОРЕМА 2. Набор подклассов

$$\{K_{al}^1, K_{al}^2, K_{al}, K_{bal}, K_{gal}, K_d^1, K_d^2, K_{cr}^1, K_{cr}^2, K_{cr}, K_{sp}, \varnothing\}$$

класса K^c относительно теоретико-множественного включения образует решетку L^c, являющуюся подрешеткой (как по $\bigcap$, так и по $\bigcup$) булевой алгебры всех подклассов класса K^c. В частности (ср. с замечанием 1), выполняются равенства

$$K_{cr}^1 \bigcup K_{sp} = K_d^1,\ K_{cr}^2 \bigcup K_{sp} = K_d^2,\ K_d^1 \bigcup K_{cr}^2 = K_d^2 \bigcup K_{cr}^1 = K_{bal}.$$

Замечание 3. Для антагонистических игр, в которых множество исходов является конечной цепью (в частности, для матричных игр), справедливо $K_{al} = K_{sp}$, следовательно,

$$K_{al} = K_{al}^1 = K_{al}^2 = K_{bal} = K_d^1 = K_d^2 = K_{sp};$$

кроме того, по замечанию 2 $K^1_{cr} = K^2_{cr} = K_{cr} = \varnothing$. Таким образом, в этом случае диаграмма подклассов (1) принимает вид 2-элементной цепи с наибольшим элементом K_{sp} и наименьшим элементом $\varnothing$.

УДК 517.54

С. В. Романова

ОЦЕНКИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ, НЕ ПРИНИМАЮЩИХ НУЛЕВОГО ЗНАЧЕНИЯ*

Пусть B – класс всех функций f, $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots$, аналитических в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ и удовлетворяющих в D условию $0 < |f(z)| \le 1$.

Кжиж [1] высказал гипотезу, что $\sup\limits_{f \in B} |a_n| = 2/e$, $n \ge 1$, с равенством для функций $\lambda F(kz^n)$, $|\lambda| = |k| = 1$, где $F(z) = \exp((z-1)/(z+1))$. Гипотеза была доказана для $n = 1,2,3,4$ [2]. Поскольку класс B инвариантен относительно вращения, достаточно рассматривать функции $f \in$ B, нормированные условием $a_0 > 0$. Ввиду неравенства $0 < a_0 \le 1$, можно положить $a_0 = e^{-t}$, $0 \le t < \infty$.

Обозначим через B(t) класс функций $f \in$ B, для которых $a_0 = e^{-t}$,

$$F_t(z) = \exp(-t(1-z)/(1+z)) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) z^k .$$

Будем рассматривать линейные непрерывные функционалы вида

$$L(f) = \mathrm{Re}(a_n + \alpha_{n-1} a_{n-1} + \dots + \alpha_1 a_1), \ \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in C .$$

В [3] были приведены результаты об асимптотических оценках функционалов вида $L(f)$ при t, близких к 0 и t, близких к ∞. Эти оценки имеют различную природу. При $t > 0$, близких к 0, только функционал $L(f) = \mathrm{Re}\, a_n$ имеет экстремальную функцию $F_t(z^n)$. При достаточно больших t любой функционал вида $L(f)$ имеет экстремальную функцию $F_t(z)$. Справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Для всякого $n \ge 1$ найдется $t_0 > 0$ такое, что для всех $t \in [0, t_0]$ $\max\limits_{f \in B(t)} |a_n| = A_1(t)$.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 01-01-00123.