кроме того, по замечанию 2 $K_{cr}^1 = K_{cr}^2 = K_{cr} = \varnothing$. Таким образом, в этом случае диаграмма подклассов (1) принимает вид 2-элементной цепи с наибольшим элементом K_{sp} и наименьшим элементом $\varnothing$.

УДК 517.54

С. В. Романова

ОЦЕНКИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ, НЕ ПРИНИМАЮЩИХ НУЛЕВОГО ЗНАЧЕНИЯ*

Пусть B – класс всех функций f, $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots$, аналитических в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ и удовлетворяющих в D условию $0 < |f(z)| \le 1$.

Кжиж [1] высказал гипотезу, что $\sup\limits_{f \in B} |a_n| = 2/e$, $n \ge 1$, с равенством для функций $\lambda F(kz^n)$, $|\lambda| = |k| = 1$, где $F(z) = \exp((z-1)/(z+1))$. Гипотеза была доказана для $n = 1,2,3,4$ [2]. Поскольку класс B инвариантен относительно вращения, достаточно рассматривать функции $f \in$ B, нормированные условием $a_0 > 0$. Ввиду неравенства $0 < a_0 \le 1$, можно положить $a_0 = e^{-t}$, $0 \le t < \infty$.

Обозначим через B(t) класс функций $f \in$ B, для которых $a_0 = e^{-t}$,

$$F_t(z) = \exp(-t(1-z)/(1+z)) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) z^k .$$

Будем рассматривать линейные непрерывные функционалы вида

$$L(f) = \mathrm{Re}(a_n + \alpha_{n-1} a_{n-1} + \dots + \alpha_1 a_1), \ \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in C .$$

В [3] были приведены результаты об асимптотических оценках функционалов вида $L(f)$ при t, близких к 0 и t, близких к ∞. Эти оценки имеют различную природу. При $t > 0$, близких к 0, только функционал $L(f) = \mathrm{Re}\, a_n$ имеет экстремальную функцию $F_t(z^n)$. При достаточно больших t любой функционал вида $L(f)$ имеет экстремальную функцию $F_t(z)$. Справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Для всякого $n \ge 1$ найдется $t_0 > 0$ такое, что для всех $t \in [0, t_0]$ $\max\limits_{f \in B(t)} |a_n| = A_1(t)$.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 01-01-00123.

ТЕОРЕМА 2. А. Для всякого $n \geq 1$ найдется $t_0 > 0$ такое, что для всех $t \in [0, t_0]$ экстремальная функция для функционала $L(f)$ будет отличной от функции $F_t(z^n)$.

В. Для всякого $n \geq 1$ найдется $t_1 > 0$ такое, что для всех $t \geq t_1$ экстремальными функциями для функционала $L(f)$ будут вращения функции $F_t(z)$.

Доказательство теоремы 2, В. Любую функцию класса $\mathrm{B}(t_0)$, $t_0 > 0$, можно представить в виде $f(z) = f(z, t_0)$, где $f(z,t)$ является интегралом обобщенного дифференциального уравнения типа Левнера

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = -f(z,t) \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{1 + e^{-iu_k(t)} z}{1 - e^{-iu_k(t)} z}, \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad z \in D, \quad f(z,0) = 1, \qquad (1)$$

$\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_m \geq 0$, $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1$, $u_k(t)$ – непрерывные действительнозначные управления.

Для нахождения области значений функционала $L(f)$ в классе $\mathrm{B}(t)$ используем принцип максимума Понтрягина. В экстремальной задаче о максимуме функционала $L(f)$ в классе $\mathrm{B}(t)$ достаточно рассматривать функции, представимые интегралами уравнения (1) с постоянными управлениями.

Обозначим $f(z,t) = a_0(t) + a_1(t) z + \ldots$ Интегрируя систему дифференциальных уравнений для $a_1(t), \ldots, a_n(t)$, приходим к формуле

$$a_n(t) = \left((-1)^n t^n C_1^n / n! + \ldots - 2tC_n\right) e^{-t}, \text{ где } C_p = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k e^{-ipu_k}.$$

Траектория $a_n(t)$ может быть оптимальной при достаточно больших t, только если m=1. Это означает, что экстремальной функцией будет $F_t(kz)$.

Доказательство утверждения А и теоремы 1 проводится аналогично. Пусть функции $f_0(z)$ соответствуют следующие управления и параметры λ_k: $u_1 = u_1^0, \ldots, u_m = u_m^0, \lambda_1 = \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m = \lambda_m^0$. Обозначим

$$\left(u^0, \lambda^0\right) = \left(u_1^0, \ldots, u_m^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0\right).$$

Назовем функцию f_0 критической точкой функционала $L(f)$, если

$$\frac{\partial L}{\partial u_1}(u^0, \lambda^0) = \ldots = \frac{\partial L}{\partial u_m}(u^0, \lambda^0) = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(u^0, \lambda^0) = \ldots = \frac{\partial L}{\partial \lambda_{m-1}}(u^0, \lambda^0) = 0.$$

Пусть $M_k(t)$ – множество таких векторов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in C^{n-1}$, что функция $F_t(z^k)$ будет критической точкой для функционала $L(f)$ при фиксированном $t > 0$.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Множество $M_k(t)$, $1 \le k \le n-1$, является гладким действительным многообразием размерности $2n-2k-1$. Множество $M_n(t)$ совпадает со множеством $(0,\ldots,0)$.

Доказательство. Интегрируя систему дифференциальных уравнений для $a_1(t),\ldots,a_n(t)$, получаем формулу для $a_n(t)$, $n \ge 1$, позволяющую выписывать систему линейных уравнений для коэффициентов $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$ из $M_k(t)$. Функции $F_t(z^k)$ соответствует точка

$$(u^0,\lambda^0) = (\pi/k,\ldots,\pi(2k-1)/k,1/k,\ldots,1/k).$$

Используя формулу для a_n, получаем систему относительно

$$\mathrm{Re}\,\alpha_{n-1},\ \mathrm{Im}\,\alpha_{n-1},\ \ldots,\ \mathrm{Re}\,\alpha_1,\ \mathrm{Im}\,\alpha_1.$$

Ранг этой системы равен $2n-2-2k$. Так как переменная $\mathrm{Re}\,\alpha_k$ не входит в систему уравнений, то размерность многообразия $M_k(t)$ будет равна $2n-2k-1$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Krzyz J.* Coefficient problem for bounded nonvanishing functions // Ann. Polon. Math. 1968. Vol. 20. P. 314.
2. *Szapiel W.* A new approach to the Krzyz conjecture // Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. 1994. Vol. 48. P. 169 – 192.
3. *Романова С.В.* Асимптотические оценки линейных функционалов для ограниченных функций, не принимающих нулевого значения // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл.11-й Сарат. зимней шк. Саратов, 2002. С. 172 – 173.

УДК 517.927.25

В. С. Рыхлов

УСЛОВИЯ СИЛЬНОЙ НЕРЕГУЛЯРНОСТИ ПРОСТЕЙШЕГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА*

Рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор L, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y) = y^{(n)}(x), \qquad x \in [0,1], \tag{1}$$

и граничными условиями

$$U_\nu(y) = \alpha_\nu y^{(\nu-1)}(0) + y^{(\nu-1)}(1) = 0, \quad \nu = \overline{1,n}, \tag{2}$$

где $\alpha_\nu \in \mathbf{C}$.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00075, и программы «Ведущие научные школы», проект № 00-15-96123.