ТЕОРЕМА 3. Множество $M_k(t)$, $1 \le k \le n-1$, является гладким действительным многообразием размерности $2n-2k-1$. Множество $M_n(t)$ совпадает со множеством $(0,\dots,0)$.

Доказательство. Интегрируя систему дифференциальных уравнений для $a_1(t),\dots,a_n(t)$, получаем формулу для $a_n(t)$, $n \ge 1$, позволяющую выписывать систему линейных уравнений для коэффициентов $(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})$ из $M_k(t)$. Функции $F_t(z^k)$ соответствует точка

$$(u^0,\lambda^0) = (\pi/k,\dots,\pi(2k-1)/k, 1/k,\dots,1/k).$$

Используя формулу для a_n, получаем систему относительно

$$\operatorname{Re}\alpha_{n-1}, \operatorname{Im}\alpha_{n-1}, \dots, \operatorname{Re}\alpha_1, \operatorname{Im}\alpha_1.$$

Ранг этой системы равен $2n-2-2k$. Так как переменная $\operatorname{Re}\alpha_k$ не входит в систему уравнений, то размерность многообразия $M_k(t)$ будет равна $2n-2k-1$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Krzyz J.* Coefficient problem for bounded nonvanishing functions // Ann. Polon. Math. 1968. Vol. 20. P. 314.
2. *Szapiel W.* A new approach to the Krzyz conjecture // Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. 1994. Vol. 48. P. 169 – 192.
3. *Романова С.В.* Асимптотические оценки линейных функционалов для ограниченных функций, не принимающих нулевого значения // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл.11-й Сарат. зимней шк. Саратов, 2002. С. 172 – 173.

УДК 517.927.25

В. С. Рыхлов

УСЛОВИЯ СИЛЬНОЙ НЕРЕГУЛЯРНОСТИ ПРОСТЕЙШЕГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА*

Рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор L, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y) = y^{(n)}(x), \qquad x \in [0,1], \tag{1}$$

и граничными условиями

$$U_\nu(y) = \alpha_\nu y^{(\nu-1)}(0) + y^{(\nu-1)}(1) = 0, \quad \nu = \overline{1,n}, \tag{2}$$

где $\alpha_\nu \in \mathbf{C}$.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00075, и программы «Ведущие научные школы», проект № 00-15-96123.

При изучении спектральных свойств оператора L возникает вопрос о классификации таких операторов по степени роста функции Грина оператора $(L-\lambda E)^{-1}$ при $|\lambda|\to\infty$ в зависимости от значений параметров α_ν. Для решения этого вопроса необходимо предварительно провести классификацию краевых условий (2) по степени вырожденности характеристического определителя оператора L. Некоторым результатам в этом направлении и посвящена данная статья.

Далее рассмотрим только нечетное $n=2m+1$, $m\geq 2$. Обозначим через ω_j различные корни n-й степени из -1. Пусть $\lambda\in\mathbf{C}$ есть спектральный параметр, $\lambda=-\rho^n$. Очевидно, уравнение $l(y)=\lambda y$ имеет фундаментальную систему решений $y_j(x,\rho)=\exp(\rho\omega_j x)$, $j=\overline{1,n}$. Положим

$$U_\nu(y_j)=u_{\nu j}(\rho)=\rho^{\nu-1}(v_{\nu j}+e^{\rho\omega_j}w_{\nu j}),$$

где $v_{\nu j}=\alpha_\nu\omega_j^{\nu-1}$, $w_{\nu j}=\omega_j^{n-1}$, $V_j=(v_{1j}v_{2j}\ldots v_{nj})^T$, $W_j=(w_{1j}w_{2j}\ldots w_{nj})^T$.

Отметим на плоскости точки 0, ω_j, $\omega_j+\omega_k$ $(j\neq k)$, $\omega_j+\omega_k+\omega_l$ $(k\neq j\neq l)$, …, $\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_n$ $(=0)$. Пусть M есть выпуклая оболочка этих точек. Очевидно, M является правильным $2n$-угольником с вершинами в точках $\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_m$, $\omega_2+\omega_3+\ldots+\omega_{m+1}$, …, $\omega_n+\omega_1+\ldots+\omega_{m-1}$ («четные» вершины) и $\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_{m+1}$, $\omega_2+\omega_3+\ldots+\omega_{m+2}$, …, $\omega_n+\omega_1+\ldots+\omega_m$ («нечетные» вершины). Если удалить эти точки и обозначить через M_1 выпуклую оболочку оставшихся точек, то M_1 будет также правильным $2n$-угольником, лежащим строго внутри M, причем вершинами M_1 будут точки $\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_{m-1}$, $\omega_2+\omega_3+\ldots+\omega_m$, …, $\omega_n+\omega_1+\ldots+\omega_{m-2}$ («четные» вершины) и $\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_{m+2}$, $\omega_2+\omega_3+\ldots+\omega_{m+3}$, …, $\omega_n+\omega_1+\ldots+\omega_{m+1}$ («нечетные» вершины).

Характеристический определитель оператора L имеет вид

$$\Delta(\rho)=\begin{vmatrix}u_{11} & \ldots & u_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ u_{n1} & \ldots & u_{nn}\end{vmatrix}=\rho^{1+2+\ldots+n-1}\,|V_1+e^{\rho\omega_1}W_1;V_2+e^{\rho\omega_2}W_2;\ldots;V_n+e^{\rho\omega_n}W_n|.$$

Если разложить определитель справа на сумму определителей, то получим сумму 2^n слагаемых вида $\Delta_{jk\ldots l}\exp(\rho(\omega_j+\omega_k+\ldots+\omega_l))$, где используются обозначения

$$\Delta_0=|V_1V_2\ldots V_n|,\ \Delta_1=|W_1V_2\ldots V_n|,\ \ldots,\ \Delta_{12}=|W_1W_2V_3\ldots V_n|,\ \ldots.$$

Используя свойство симметрии, для $\Delta(\rho)$ можно получить следующее представление, в котором слагаемые расположены по росту в порядке его не возрастания при $|\rho|\to\infty$,

$$
\begin{aligned}
\Delta(\rho) = \rho^{\frac{n(n-1)}{2}} \Big\{ & \Delta_{12\ldots m}\left[e^{\rho(\omega_1+\ldots+\omega_m)} + \ldots + e^{\rho(\omega_n+\omega_1+\ldots+\omega_{m-1})}\right] + \\
& + \Delta_{12\ldots m+1}\left[e^{\rho(\omega_1+\ldots+\omega_{m+1})} + \ldots + e^{\rho(\omega_n+\omega_1+\ldots+\omega_m)}\right] + \\
& + \Delta_{12\ldots m-1}\left[e^{\rho(\omega_1+\ldots+\omega_{m-1})} + \ldots + e^{\rho(\omega_n+\omega_1+\ldots+\omega_{m-2})}\right] + \\
& + \Delta_{12\ldots m+2}\left[e^{\rho(\omega_1+\ldots+\omega_{m+2})} + \ldots + e^{\rho(\omega_n+\omega_1+\ldots+\omega_{m+1})}\right] + \\
& + \ldots + \Delta_0 + \Delta_{12\ldots n} \Big\} .
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Некоторые коэффициенты в (3) могут равняться нулю. Отметим на плоскости те точки ω_j, $\omega_j + \omega_k$, $\omega_j + \omega_k + \omega_l$, …, которые соответствуют ненулевым коэффициентам. Пусть M_Δ есть выпуклая оболочка отмеченных точек. Очевидно, M_Δ является многоугольником, вид которого характеризует степень вырожденности характеристического определителя. Выделим первые три случая в порядке усиления вырожденности.

(I) $\Delta_{12\ldots m} \neq 0 \wedge \Delta_{12\ldots m+1} \neq 0$. Здесь $M_\Delta = M$ и в этом случае оператор L регулярен по Биркгофу [1, с. 66-67].

(II) $(\Delta_{12\ldots m} \neq 0 \wedge \Delta_{12\ldots m+1} = 0) \vee (\Delta_{12\ldots m} = 0 \wedge \Delta_{12\ldots m+1} \neq 0)$. Здесь $M_1 \subset \subset M_\Delta \subset M$ и M_Δ касается границы M либо в «четных», либо в «нечетных» вершинах, но не касается границы M_1. В этом случае оператор L является нормальным по терминологии [2]. Для $n = 3$ оператор из этого класса изучен в [3].

(III) $\Delta_{12\ldots m} = \Delta_{12\ldots m+1} = 0$, $\Delta_{12\ldots m-1} \neq 0$, $\Delta_{12\ldots m+2} \neq 0$. Здесь $M_\Delta = M_1$. Множество операторов, обладающих этим свойством, обозначим $NR(1)$.

Имеют место следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1. Справедливы равенства

$$
\Delta_{12\ldots m} = \theta\hat{\Delta}_{12\ldots m}, \qquad \Delta_{12\ldots m+1} = \theta\hat{\Delta}_{12\ldots m+1},
$$
$$
\Delta_{12\ldots m-1} = \theta\hat{\Delta}_{12\ldots m-1}, \qquad \Delta_{12\ldots m+2} = \theta\hat{\Delta}_{12\ldots m+2},
$$

где $\theta = \det\Omega$, $\Omega = (\omega_j^{\nu-1})_{\nu,j=1}^n$,

$$
\hat{\Delta}_{12\ldots k} = \begin{vmatrix}
a_1 & a_n & \cdots & a_{k+3} & a_{k+2} \\
a_2 & a_1 & \cdots & a_{k+4} & a_{k+3} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{n-k-1} & a_{n-k-2} & \cdots & a_1 & a_n \\
a_{n-k} & a_{n-k-1} & \cdots & a_2 & a_1
\end{vmatrix},
$$

$a_\nu = \hat{\alpha}_\nu \omega_1^{\nu-1}$, $\nu = \overline{1,n}$, $\hat{\alpha}_\nu$ есть компоненты вектора $\hat{\alpha} = (\Omega^T)^{-1}\alpha$, $\alpha = (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)^T$.

ТЕОРЕМА 2. $L \in NR(1)$ тогда и только тогда, когда $\hat{\Delta}_{12..m+2} \neq 0$ и выполняется какое-либо одно из следующих условий:

(1) $\theta_1 = \theta_2 = ... = \theta_{m+1} = 0$, $\theta_{m+2} \neq 0$, $\theta_n \neq 0$;

(2) $\theta_n = \theta_1 = ... = \theta_m = 0$, $\theta_{m+1} \neq 0$, $\theta_{n-1} \neq 0$,

где

$\theta_1 = a_1 - s_1 a_n - s_2 a_{n-1} - ... - s_{m-1} a_{m+3}$, $\theta_2 = a_2 - s_1 a_1 - s_2 a_n - ... - s_{m-1} a_{m+4}, \dots,$
$\theta_n = a_n - s_1 a_{n-1} - s_2 a_{n-2} - ... - s_{m-1} a_{m+2}$, $s_j \in \mathbf{C}$, $s_{m-1} \neq 0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
2. *Шкаликов А.А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семин. им. И.Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. Т. 9. С. 190 – 229.
3. *Хромов А.П.* Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка // Исследования по теории операторов. Уфа, 1988. С. 182 –193.

УДК 517.51

С. П. Сидоров

ПРИБЛИЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ МОДИФИКАЦИЯМИ ОПЕРАТОРОВ БАСКАКОВА*

Обозначим $X = [0,1]$, $\|\cdot\|$ будет означать равномерную норму в $C(X)$, $\|f\| = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$.

Пусть $\{L_n\}_{n \geq 1}$ – последовательность линейных положительных операторов В.А. Баскакова [1]:

$$L_n f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!} \varphi_n^{(r)}(x) \cdot x^r \cdot \psi\left(\frac{r}{n}\right), \quad x \in X, \quad f \in C^j(X),$$

где $\psi(x) = \begin{cases} f(x), x \in X, \\ e^{-(x-1)^{j+1}} \sum\limits_{i=0}^{j} \frac{1}{i!} (x-1)^i f^{(i)}(1), x > 1, \end{cases}$ и

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} (1+px)^{-\frac{n}{p}}, & p \neq 0, \quad p \geq -1, \\ e^{-nx}, & p = 0. \end{cases}$$

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01120, и частичной поддержке программы "Ведущие научные школы", проект № 00-15-96123.