4. *Тихомиров В.В.* Об аппроксимации функций с заданной скоростью сходимости // Изв. вузов. Сер. Математика. 1976. № 10. С. 113 – 115.

5. *Сидоров С.П.* Приближение непрерывных функций модификациями операторов Баскакова // Информационные технологии в естественных науках, экономике и образовании: Тр. междунар. науч. конф. Саратов-Энгельс, 2002. С. 280 – 281.

6. *Сидоров С.П.* Конструкции операторов класса S_m и их аппроксимативные свойства. Саратов, 1992. 29 с. Деп. в ВИНИТИ 14.12.92, № 3530 - В92.

УДК 517.52

Г. А. Сорокин

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ ОДНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РЯДОВ

В данной статье излагается метод суммирования расходящихся рядов и формула, устраняющая явление Гиббса. При этом применяется

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – произвольные последовательности действительных или комплексных чисел, удовлетворяющие условиям: $a_n - b_n \neq 0$ при $n = 1,2,\ldots,$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_n - b_n} = 0$. Тогда если ряд в левой части равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1^2}{a_1 - b_1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}^2}{a_{n+1} - b_{n+1}} - \frac{a_n b_n}{a_n - b_n}\right) \tag{1}$$

сходится, то это равенство справедливо.

Действительно, правая часть (1) равна

$$\frac{a_1^2}{a_1 - b_1} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n^2}{a_n - b_n} - \frac{a_{n+1}^2}{a_{n+1} - b_{n+1}} - a_n\right) = \frac{a_1^2}{a_1 - b_1} - \frac{a_1^2}{a_1 - b_1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Полагая в (1) $b_n = \lambda a_n$, где $\lambda \neq 1$ и не зависит от n, получим формулу

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-\lambda} + \frac{1}{1-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{n+1} - \lambda a_n\right), \tag{2}$$

опубликованную в [1, с.35].

Эту формулу мы применим при исследовании явления Гиббса. Ограничимся случаем, когда

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{при} \quad 0 < x < \pi, \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{при} \quad -\pi < x < 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0, \pi. \end{cases}$$

Как известно [2, с. 596], исследование явления Гиббса для произвольной функции ограниченной вариации сводится к рассматриваемому случаю.

Пользуясь формулой Эйлера, получим

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{(2n-1)xi}-e^{-(2n-1)xi}}{2i(2n-1)}=-i\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{(2n-1)xi}}{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-(2n-1)xi}}{2n-1}\right). \quad (3)$$

Улучшим сходимость первого ряда по формуле (2), полагая в ней $\lambda=e^{2xi}$, $x\neq 0,\pi$. Имеем $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{(2n-1)xi}}{2n-1}=\frac{e^{xi}}{1-e^{2xi}}\left(1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2nxi}}{(2n-1)(2n+1)}\right)$. Упростим первый множитель. Применяя формулу Эйлера, получим $\frac{e^{xi}}{1-e^{2xi}}=-\frac{1}{e^{xi}-e^{-xi}}=-\frac{1}{2i\sin x}=\frac{i}{2\sin x}$ и, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{(2n-1)xi}}{2n-1}=\frac{i}{2\sin x}\left(1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2nxi}}{(2n-1)(2n+1)}\right). \quad (4)$$

Заменяя в (4) x на $(-x)$, будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-(2n-1)xi}}{2n-1}=-\frac{i}{2\sin x}\left(1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-2nxi}}{(2n-1)(2n+1)}\right). \quad (5)$$

Подставив (4) и (5) в (3), получим искомую формулу

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\frac{1}{\sin x}\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2nxi}-e^{-2nxi}}{(2n-1)(2n+1)}\right)=\frac{1}{\sin x}\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos 2nx}{(2n-1)(2n+1)}\right)=$$

$$=\frac{2}{\sin x}\left(\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos 2nx}{(2n-1)(2n+1)}\right)=\frac{4}{\sin x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nx}{(2n-1)(2n+1)}. \quad (6)$$

Отсюда видно, что частичная сумма s_n полученного ряда монотонно возрастает с возрастанием n и полностью устраняет явление Гиббса.

Далее определим метод суммирования расходящихся рядов, основанный на преобразовании (2). Применяя его p раз, получим формулу [1, с. 36]

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a_1}{1-\lambda}+\sum_{k=1}^{p-1}\Delta_{\lambda}^{k}a_1\frac{1}{(1-\lambda)^{k-1}}+\frac{1}{(1-\lambda)^{p}}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta_{\lambda}^{p}a_n, \quad (7)$$

где по определению $\Delta_{\lambda}a_n=a_{n+1}-\lambda a_n$, $\Delta_{\lambda}^{p}a_n=\Delta_{\lambda}\left(\Delta_{\lambda}^{p-1}a_n\right)$.

Если ряд в левой части формулы (7) расходится, а ряд в правой части (7) при некотором p сходится, то будем говорить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ суммируем методом $\left(\Delta_{\lambda}^{p}\right)$ и его обобщенная сумма равна правой части (7).

Регулярность этого метода суммирования очевидна.

Пример. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ суммируется методом (Δ_λ) при любом $|z|>1$.

Действительно, полагая в (2) $\lambda = z$, получим $\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}$. К этому ряду методы Чезаро, Ламберта и Пуассона-Абеля не применимы. Метод Бореля суммирует этот ряд в полуплоскости $\operatorname{Re} z < 1$ к сумме $\frac{z}{1-z}$. Таким образом, метод (Δ_λ) сильнее всех перечисленных методов.

ТЕОРЕМА 2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируем методом Пуассона-Абеля к сумме s, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - \lambda a_n)$ при некотором $\lambda \neq 1$ сходится, то данный ряд суммируется методом (Δ_λ) к той же сумме s.

В самом деле, по методу Пуассона обобщенная сумма $s = \lim\limits_{x \to 1-0} f(x)$, где $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Применяя к этому сходящемуся ряду формулу (2) при $\lambda = \lambda x$, получим $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \frac{a_1 x}{1-\lambda x} + \frac{x}{1-\lambda x}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - \lambda a_n)x^n$. Отсюда находим $\varphi(x) = \left(f(x) - \frac{a_1 x}{1-\lambda x}\right)\frac{1-\lambda x}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - \lambda a_n)x^n$, $x \neq 0$. По методу Пуассона ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - \lambda a_n)$ суммируется, и его сумма равна

$$\lim_{x \to 1-0} \varphi(x) = \left(s - \frac{a_1}{1-\lambda}\right)(1-\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - \lambda a_n).$$

Отсюда находим $s = \frac{a_1}{1-\lambda} + \frac{1}{1-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - \lambda a_n)$.

Следовательно, данный ряд суммируется методом (Δ_λ) и его обобщенная сумма равна s.

В заключение заметим, что если $\lim\limits_{n \to \infty} n a_n = 0$, то из (1) при $b_n = a_n \frac{n+1}{n}$ вытекает формула $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$. Полагая в ней $a_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, получим для постоянной Эйлера равенство

$$c = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2} - n\ln\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)\right).$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Сорокин Г.А.* О некоторых преобразованиях рядов // Изв. вузов. Сер. Математика. 1984. № 11. С.35 – 41.

2. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. М.; Л., 1949. Т. III.

3. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. М., 1961.

УДК 517.51

В. Г. Тимофеев

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ КОНЕЧНОСТИ КОНСТАНТЫ В ОДНОМ МНОГОМЕРНОМ НЕРАВЕНСТВЕ КОЛМОГОРОВА

Пусть $U_2 = \{u : u \in L_2(R^m), \Delta^n u \in L_2(R^m)\}$, $m \ge 1$, $L_2 = L_2(R^m)$ – пространство измеримых на R^m функций с нормой $\|u\|_2 = \|u\|_{L_2} = \left\{\int_{R^m} |u(x)|^2\,dx\right\}^{1/2}$; $C = C(R^m)$ – пространство непрерывных ограниченных на R^m функций с нормой $\|u\|_C = \sup\left\{|u(x)| : x \in R^m\right\}$; $S = S(R^m)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций, убывающих при $|x| \to \infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Оператор Лапласа $\Delta^n u$, $n \ge 1$, понимается в обобщенном смысле, а именно: относительно пары функций $u \in L_2$, $v \in L_2$ считаем, что $u \in U_2$ и $v = \Delta^n u$, если для любой функции $\varphi \in S$ выполняется равенство

$$\int_{R^m} v\varphi dx = \int_{R^m} u\Delta^n \varphi dx.$$

Рассмотрим дифференциальный оператор следующего вида:

$$\Phi_k u = \sum_{|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = k} C_\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}, \qquad (1)$$

где C_α – постоянные коэффициенты.

Этот оператор порождается однородным полиномом