$$c=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}-n\ln\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)\right).$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Сорокин Г.А.* О некоторых преобразованиях рядов // Изв. вузов. Сер. Математика. 1984. № 11. С.35 – 41.
2. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. М.; Л., 1949. Т. III.
3. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. М., 1961.

УДК 517.51

В. Г. Тимофеев

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ КОНЕЧНОСТИ КОНСТАНТЫ В ОДНОМ МНОГОМЕРНОМ НЕРАВЕНСТВЕ КОЛМОГОРОВА

Пусть $U_2=\{u:u\in L_2(R^m),\Delta^n u\in L_2(R^m)\}$, $m\geq 1$, $L_2=L_2(R^m)$ – пространство измеримых на R^m функций с нормой $\|u\|_2=\|u\|_{L_2}=\left\{\int\limits_{R^m}|u(x)|^2\,dx\right\}^{1/2}$; $C=C(R^m)$ – пространство непрерывных ограниченных на R^m функций с нормой $\|u\|_C=\sup\left\{|u(x)|: x\in R^m\right\}$; $S=S(R^m)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций, убывающих при $|x|\to\infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Оператор Лапласа $\Delta^n u$, $n\geq 1$, понимается в обобщенном смысле, а именно: относительно пары функций $u\in L_2$, $v\in L_2$ считаем, что $u\in U_2$ и $v=\Delta^n u$, если для любой функции $\varphi\in S$ выполняется равенство

$$\int\limits_{R^m} v\varphi dx=\int\limits_{R^m} u\Delta^n\varphi dx.$$

Рассмотрим дифференциальный оператор следующего вида:

$$\Phi_k u=\sum_{|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m=k} C_\alpha\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}},\tag{1}$$

где C_α – постоянные коэффициенты.

Этот оператор порождается однородным полиномом

$$p_k(t) = \sum_{|\alpha|=k} C_\alpha t_1^{\alpha_1} \dots t_m^{\alpha_m} . \tag{2}$$

Считаем при $k=0$ $\Phi_0 u = u$.

Выпишем условия на n и m и оператор (1), при выполнении которых для любой функции $u \in U_2$ функция $\Phi_k u$ принадлежит $C(R^m)$ и при любых A, B конечна величина [1]

$$\omega(A,B) = \sup\left\{ \|\Phi_k u\|_C : u \in U_2,\ \|u\|_2 \le A,\ \|\Delta^n u\|_2 \le B \right\}. \tag{3}$$

Без труда проверяется, что [2]

$$\omega(A,B) = KA^\alpha B^\beta , \tag{4}$$

где α выражается через n,k, а $\beta = 1-\alpha$.

Следовательно, величина (3) конечна в том и только том случае, если функции класса U_2 удовлетворяют неравенству [3]

$$\|\Phi_k u\|_C \le K \|u\|_2^\alpha \|\Delta^n u\|_2^\beta \tag{5}$$

с конечной константой K.

ТЕОРЕМА. Для того чтобы имело место вложение $\Phi_k U_2 \subset C$ и была конечна константа K в (4) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$k < 2n - \frac{m}{2}. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $u \in L_2$ и $\hat{u}$ – преобразование Фурье функции u в смысле L_2 или, то же самое, в смысле теории обобщенных функций. По теореме Планшереля $\hat{u} \in L_2$ и $\|u\|_2 = \|\hat{u}\|_2$. Если $u \in U_2$, то $\hat{\Delta}^n u = (-1)^n |t|^{2n} \hat{u}$ и $\left\| |t|^{2n} \hat{u} \right\|_2 = \|\Delta^n u\|_2$. Для $u \in U_2$ имеем по (2)

$$p_k(t)\hat{u}(t) = \frac{p_k(t)}{(1+|t|^{4n})^{1/2}} (1+|t|^{4n})^{1/2} \hat{u}(t). \tag{7}$$

Если функция

$$\varphi(t) = \frac{p_k(t)}{(1+|t|^{4n})^{1/2}} \tag{8}$$

принадлежит L_2, то из (7) и (8) следует $p_k \hat{u} \in L_1$ и имеет место неравенство

$$\| p_k \hat{u} \|_1 \le \|\varphi\|_2 \left(\|\hat{u}\|_2^2 + \left\| |t|^{2n} \hat{u} \right\|_2^2 \right)^{1/2} .$$

Отсюда следует, что $\Phi_k u \in C$; конечна величина (4) и константа K в (5).

Покажем, что если функция φ не принадлежит L_2, то константа K в (5) не будет конечной.

Обозначим через u_ρ функцию, у которой

$$\hat{u}_\rho(t) = \begin{cases} C_\rho \dfrac{\overline{p_k(t)}}{1+|t|^{4n}}, & |t| \le \rho, \\ 0, & |t| > \rho \end{cases}$$

и константа C_ρ выбирается из условия, что норма функции $\hat{u}_\rho(t)(1+|t|^{4n})^{1/2}$ в L_2 равна 1, т.е. $C_\rho^2 = \left(\int\limits_{Ш_\rho} \dfrac{|p_k(t)|^2}{1+|t|^{4n}} dt \right)^{-1}$, где $Ш_\rho$ – шар радиуса $\rho > 0$ с центром в точке 0. При таком выборе C_ρ имеем $\|u_\rho\|_2 \le 1$, $\|\Delta^n u_\rho\|_2 < \infty$. Однако

$$(\Phi_k u_\rho)(0) = C_\rho \int\limits_{Ш_\rho} \frac{|p_k(t)|^2}{1+|t|^{4n}} dt = \left(\int\limits_{Ш_\rho} \frac{|p_k(t)|^2}{1+|t|^{4n}} dt \right)^{1/2}.$$

По предположению $\varphi \notin L_2$, тогда при $\rho \to \infty$ последняя величина стремится к ∞. Следовательно, константа K в (5) не может быть конечной.

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что принадлежность функции φ пространству L_2 равносильна выполнению условия (6). Действительно, поскольку $p_k(t) = |t|^k \, p_k\left(\dfrac{t}{|t|}\right)$, то

$$\int\limits_{R^m} \frac{|p_k(t)|^2}{1+|t|^{4n}} dt = \int\limits_{S^{m-1}} |p_k(s)|^2 \, ds \int\limits_0^\infty \frac{\rho^{2k+m-1}}{1+\rho^{4n}} d\rho, \tag{9}$$

где S^{m-1} – единичная сфера в R^m. Последний интеграл в (9) конечен в том и только том случае, если $4n > 2k + m$. Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Тимофеев В.Г.* Неравенства типа Колмогорова с итерированным оператором Лапласа // Теория функций и приближений. Интерполирование по Лагранжу: Межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1984. С. 73 – 78.

2. *Тимофеев В.Г.* Наилучшее приближение в равномерной и L_2 метриках оператора дифференцирования на некоторых классах функций многих переменных. Саратов, 1985. 22 с. Деп. в ВИНИТИ 11.04.1985, № 2451-85.

3. *Тимофеев В.Г.* Об одном экстремальном неравенстве типа Ландау с итерированными операторами Лапласа в $L_2(R^m)$ // Теория функций и приближений: Тр. 2-й Сарат. зимней шк.: Межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986. Ч.3. С. 114 – 117.