УДК 517.977

Н. Ю. Трошина

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СО СВЯЗАННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Воспользуемся теорией Дубовицкого-Милютина [1] для вывода принципа максимума следующей задачи:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t),\ t = 0,\dots,T-1, \tag{1}$$

$$Px(0) + Qx(T) = a, \tag{2}$$

$$I(x,u) = \sum_{t=0}^{T-1}\left[< Mx(t), x(t) > + < Du(t), u(t) >\right] \to \min . \tag{3}$$

Здесь A, M – матрицы размерности $n \times n$, B, D – матрицы размерности $n \times m, m \times m$ соответственно, P, Q – $r \times n$ матрицы, a – r-вектор, $x=\{x(0),\dots,x(T)\}$ – дискретная траектория, $u=\{u(0),\dots,u(T\text{-}1)\}$ – дискретное управление, $<,>$ – скалярное произведение векторов.

Пусть M, D – симметричные матрицы, причем D – неособенная, и пусть решение задачи (1) – (3) (оптимальная пара (x^*,u^*)) существует. Будем предполагать, что ранг$[B, AB,\dots, A^{n-1}B] = n$, ранг$[P,Q]=r$, $n \le Tm$, $r \le 2n$. В этом случае система (1) управляема и краевая задача (1) – (2) разрешима при любом a.

Обозначим: K_0 – конус запрещенных вариаций функционала (3), K_0^* – сопряженный конус к K_0, K_1 – конус касательных направлений для ограничений (1), (2), K_1^* – сопряженный для K_1.

Нетрудно проверить, что выполняются все условия теоремы Дубовицкого-Милютина о пересечении выпуклых конусов. Следовательно, существуют не равные одновременно нулю линейные функционалы f_0, f_1, заданные на множестве пар (x,u) и принадлежащие конусам K_0^*, K_1^* соответственно, для которых имеет место уравнение Эйлера

$$f_0 + f_1 = 0. \tag{4}$$

ЛЕММА 1. Функционал f_0, принадлежащий конусу K_0^*, имеет вид

$$f_0(x,u) = -\lambda_0 \sum_{t=0}^{T-1}\left[< Mx^*(t), x(t) > + < Du^*(t), u(t) >\right],\ \text{где } \lambda_0 \ge 0 .$$

Лемма является следствием теоремы 4.1 в [2].

ЛЕММА 2. Пусть $f_1 \in K_1^*$. Если пара (x,u) удовлетворяет дискретной системе (1), то существует вектор $\lambda \in E^r$ такой, что имеет место равенство

$$f_1(x,u) = <\lambda, Px(0)+Qx(T)>.$$

Доказательство. Рассмотрим семейство краевых задач

$$x(t+1)=Ax(t)+Bu(t), \quad t=0,1,\ldots,T-1, \tag{5}$$

$$Px(0)+Qx(T)=a_i, \quad i=1,\ldots,r, \tag{6}$$

где a_i – r-вектор, у которого i-я координата равна единице, а остальные равны нулю. Пусть (x_i,u_i) – решение задачи (5) – (6), и пусть пара (x,u) удовлетворяет системе (1). Рассмотрим пару $(\bar{x},\bar{u}) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (x_i,u_i) - (x,u)$, где $\alpha_i = [Px(0)+Qx(T)]_i$ – i-я координата вектора $Px(0)+Qx(T)$. Покажем, что $(\bar{x},\bar{u})$ принадлежит конусу K_1, который состоит из пар, удовлетворяющих системе (1) и условию

$$Px(0)+Qx(T)=0, \tag{7}$$

что следует из определения конуса касательных направлений и линейности ограничений (1) – (2). Очевидно,

$$P\bar{x}(0)+Q\bar{x}(T) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (Px_i(0)+Qx_i(T)) - (Px(0)+Qx(T)) = 0.$$

Это равенство означает, что $(\bar{x},\bar{u})$ удовлетворяет условию (7). Легко также проверить, что $(\bar{x},\bar{u})$ удовлетворяет системе (1). Таким образом, $(\bar{x},\bar{u}) \in K_1$ и, следовательно, $f_1(\bar{x},\bar{u})=0$, то есть

$$f_1(\bar{x},\bar{u}) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i f_1(x_i,u_i) - f_1(x,u) = 0. \tag{8}$$

Обозначим: $\lambda = (f_1(x_1,u_1),\ldots,f_1(x_r\ ,u_r\ ))^T$. Тогда из (8) для пары (x,u), удовлетворяющей (1), получим

$$f_1(x,u) = <\lambda, Px(0)+Qx(T)>.$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА (принцип максимума). Если (x^*,u^*) – решение задачи (1) - (3), то существуют векторы $\lambda \in E^m$, $\psi(t) \in E^n$ $(t=0,\ldots,T-1)$ такие, что:

1) выполняется сопряженное уравнение

$$\psi(t) = A^T \psi(t+1) - Mx(t), \quad t=0,\ldots,T-1; \tag{9}$$

2) выполняются условия трансверсальности

$$\psi(0) = -P^T \lambda, \tag{10}$$

$$\psi(T) = Q^T \lambda; \tag{11}$$

3) оптимальное управление определяется по формуле

$$u(t) = D^{-1}B^T \psi(t+1), \quad t=0,\ldots,T-1.$$

Доказательство. Возьмем пару (x,u), удовлетворяющую системе (1). Используя леммы 1,2, запишем уравнение Эйлера

$$-\lambda_0 \sum_{t=0}^{T-1}\left[< Mx^*(t), x(t) > + < Du^*(t), u(t) >\right] + < \lambda, Px(0) + Qx(T) > = 0. \quad (12)$$

Здесь $\lambda_0 \neq 0$, так как в противном случае $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, что противоречит теореме Дубовицкого-Милютина, то есть можно считать, что $\lambda_0 = 1$.

Возьмем последовательность n-векторов $\psi = \{\psi(0), \ldots, \psi(T-1)\}$. Умножим (1) скалярно на $\psi(t+1)$, просуммируем по t от 0 до T-1 и сложим с (12). Получим

$$-\sum_{t=0}^{T-1}\left[< Mx^*(t), x(t) > + < Du^*(t), u(t) >\right] + < \lambda, Px(0) + Qx(T) > +$$

$$+\sum_{t=0}^{T-1} < \psi(t+1), -x(t+1) + Ax(t) + Bu(t) > = 0,$$

или

$$\begin{aligned}&-\sum_{t=0}^{T-1}\left[< Mx^*(t), x(t) > + < Du^*(t), u(t) >\right] + < \lambda, Px(0) + Qx(T) > - \\ &-\sum_{t=0}^{T-1} < \psi(t), x(t) > + < \psi(0), x(0) > - < \psi(T), x(T) > + \\ &+\sum_{t=0}^{T-1} < A^T\psi(t+1), x(t) > + \sum_{t=0}^{T-1} < B^T\psi(t+1), u(t) > = 0.\end{aligned} \quad (13)$$

Выберем $\psi(t)$ как решение задачи Коши:

$$\psi(t) = A^T\psi(t+1) - Mx^*(t), \quad t = 0, \ldots, T-1$$

$$\psi(T) = Q^T\lambda,$$

Это будет означать, что выполняются условия (9), (11). При этом вместо (13) будем иметь

$$\begin{aligned}&-\sum_{t=0}^{T-1}\left[< Du^*(t), u(t) >\right] + < P^T\lambda, x(0) > + < \psi(0), x(0) > + \\ &+\sum_{t=0}^{T-1} < B^T\psi(t+1), u(t) > = 0.\end{aligned} \quad (14)$$

На управление не наложено никаких ограничений, поэтому можно взять $u(t) \equiv 0$. Тогда $< P^T\lambda, x(0) > + < \psi(0), x(0) > = 0$, и из-за произвольности $x(0)$ отсюда будет следовать условие (10). Кроме того, получим

$$-\sum_{t=0}^{T-1}\left[< Du^*(t), u(t) >\right] + \sum_{t=0}^{T-1} < B^T\psi(t+1), u(t) > = 0. \quad (15)$$

Так как в (15) управление $u=\{u(0),\dots,u(T\text{-}1)\}$ можно выбирать произвольно, то будем иметь

$$< B^T\psi(t+1) - Du^*(t), u(t) >= 0, \quad t = 0,\dots T-1,$$

откуда $B^T\psi(t+1) - Du^*(t) = 0 \ (t = 0,\dots T-1)$, то есть выполняется условие 3). Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВМ и МФ. 1965. № 3. С. 395 – 453.

2. *Трошина Н.Ю.* Принцип максимума и задача синтеза для линейных дискретных систем: Дис. … канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1997. 144 с.

УДК 517.977/977.58

Е. А. Трушкова

ФУНКЦИИ, СИНТЕЗИРУЮЩИЕ СЕМЕЙСТВА ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \tag{1}$$

где $x(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t))^T \in W_2^1[0;1]$, $u(t) \in L_2[0;1]$, $b = (0,0,\dots,1)^T \in R^n$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -g_n & -g_{n-1} & \dots & -g_2 & -g_1 \end{pmatrix}$$ – матрица $n \times n$, где $g_i \in R$, $i = 1,2,\dots,n$.

Рассмотрим также функционалы качества следующего вида:

$$J = \int_0^1 \left((x, \mathrm{M}x) + u^2\right)dt, \quad J_0 = \int_0^\alpha \left((x, \mathrm{M}x) + u^2\right)dt, \quad J_1 = \int_\alpha^1 \left((x, \mathrm{M}x) + u^2\right)dt,$$

где M – неотрицательно определенная матрица $n \times n$, $\alpha \in (0;1)$.

Пусть Z – множество задач оптимального управления (1), $t \in [0;1]$, $J \to \min$, с различными условиями, связывающими $x(0)$, $x(\alpha)$ и $x(1)$; Z_0 – множество задач оптимального управления (1), $t \in [0;\alpha]$, $J_0 \to \min$, с различными условиями, связывающими $x(0)$ и $x(\alpha)$; Z_1 – множество задач оптимального управления (1), $t \in [\alpha;1]$, $J_1 \to \min$, с различными условиями, связывающими $x(\alpha)$ и $x(1)$.