Так как в (15) управление $u=\{u(0),\ldots,u(T\text{-}1)\}$ можно выбирать произвольно, то будем иметь

$$< B^T\psi(t+1) - Du^*(t), u(t) >= 0, \quad t = 0,\ldots T-1,$$

откуда $B^T\psi(t+1) - Du^*(t) = 0$ $(t = 0,\ldots T-1)$, то есть выполняется условие 3). Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Дубовицкий А.Я, Милютин А.А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВМ и МФ. 1965. № 3. С. 395 – 453.

2. *Трошина Н.Ю.* Принцип максимума и задача синтеза для линейных дискретных систем: Дис. … канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1997. 144 с.

УДК 517.977/977.58

Е. А. Трушкова

ФУНКЦИИ, СИНТЕЗИРУЮЩИЕ СЕМЕЙСТВА ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \tag{1}$$

где $x(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))^T \in W_2^1[0;1]$, $u(t) \in L_2[0;1]$, $b = (0,0,\ldots,1)^T \in R^n$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -g_n & -g_{n-1} & \ldots & -g_2 & -g_1 \end{pmatrix}$$ – матрица $n \times n$, где $g_i \in R$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Рассмотрим также функционалы качества следующего вида:

$$J = \int_0^1 \left((x,\mathrm{M}x) + u^2\right)dt, \quad J_0 = \int_0^\alpha \left((x,\mathrm{M}x) + u^2\right)dt, \quad J_1 = \int_\alpha^1 \left((x,\mathrm{M}x) + u^2\right)dt,$$

где M – неотрицательно определенная матрица $n \times n$, $\alpha \in (0;1)$.

Пусть Z – множество задач оптимального управления (1), $t \in [0;1]$, $J \to \min$, с различными условиями, связывающими $x(0)$, $x(\alpha)$ и $x(1)$; Z_0 – множество задач оптимального управления (1), $t \in [0;\alpha]$, $J_0 \to \min$, с различными условиями, связывающими $x(0)$ и $x(\alpha)$; Z_1 – множество задач оптимального управления (1), $t \in [\alpha;1]$, $J_1 \to \min$, с различными условиями, связывающими $x(\alpha)$ и $x(1)$.

ТЕОРЕМА 1. Справедливы следующие утверждения:

1. Пусть $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$, $t \in [0;1]$ – решение задачи $z \in Z$ с условиями $\gamma_i(x(0), x(\alpha), x(1)) = 0$, $1 \le i \le l$, l – целое. Тогда $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$, $t \in [0;\alpha]$ – решение задачи $z_0 \in Z_0$ с условиями $x(0) = \tilde{x}(0)$, $x(\alpha) = \tilde{x}(\alpha)$, а $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$, $t \in [\alpha;1]$ – решение задачи $z_1 \in Z_1$ с условиями $x(\alpha) = \tilde{x}(\alpha)$, $x(1) = \tilde{x}(1)$;

2. Пусть $(\tilde{x}_0(t), \tilde{u}_0(t))$, $t \in [0;\alpha]$ – решение задачи $z_0 \in Z_0$ с условиями $\gamma_{0i}(x(0), x(\alpha)) = 0$, $1 \le i \le l_0$, l_0 – целое, а $(\tilde{x}_1(t), \tilde{u}_1(t))$, $t \in [\alpha;1]$ – решение задачи $z_1 \in Z_1$ с условиями $\gamma_{1i}(x(\alpha), x(1)) = 0$, $1 \le i \le l_1$, l_1 – целое, и, кроме того, $\tilde{x}_0(\alpha) = \tilde{x}_1(\alpha)$. Тогда $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$, $t \in [0;1]$, где $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0(t), t \in [0;\alpha]$, $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_1(t)$, $t \in (\alpha;1]$, $\tilde{u}(t) = \tilde{u}_0(t), t \in [0;\alpha], \tilde{u}(t) = \tilde{u}_1(t)$, $t \in (\alpha;1]$, – решение задачи $z \in Z$ с условиями $x(0) = \tilde{x}_0(0)$, $x(\alpha) = \tilde{x}_0(\alpha)$, $x(1) = \tilde{x}_1(1)$.

Согласно теореме 1 получаем, что решения задач Z удовлетворяют дифференциальным уравнениям принципа максимума Л.С. Понтрягина с условием непрерывности $x(t)$ в точке $t = \alpha$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \frac{1}{2} bb^T \psi, \quad \dot{\psi} = -A^T \psi + 2Mx, \quad t \in [0;\alpha) \cup (\alpha;1], \\ x(\alpha_-) = x(\alpha_+). \end{cases} \tag{2}$$

Компонента $x(t)$ решения системы (2) является оптимальной траекторией одной из рассматриваемых нами задач Z. Пусть $\Phi(t)$ – первые n строк фундаментальной матрицы решений системы (2). Обозначим через $\Phi_{11}(t)$ $(\Phi_{12}(t))$ первые (последние) n столбцов матрицы $\Phi(t)$.

Тогда множество оптимальных траекторий задач Z запишется в виде

$$\{\, x(t) \in W_2^1[0;1] \,|\, \exists C \in R^{3n} : \; x(t) = \Phi_0(t)C, t \in [0;\alpha], x(t) = \Phi_1(t)C, t \in (\alpha;1] \,\},$$

где $\Phi_0(t) = (\Phi_{11}(t) \;\; \Phi_{12}(t) \;\; 0)$, $\Phi_1(t) = (\Phi_{12}(t)B \;\; \Phi_{12}(t) \;\; \Phi_{11}(t) - \Phi_{12}(t)B)$ – матрицы $n \times 3n$, $B = \Phi_{12}^{-1}(\alpha)\Phi_{11}(\alpha)$.

Условие $C = Dp + d$, где D – постоянная матрица $3n \times k$, $rank\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = k$, $rank\begin{pmatrix} D_3 \\ BD_1 + D_2 - BD_3 \end{pmatrix} = k$, D_i, $i = 1,2,3$, – матрицы $n \times k$, состоящие из первых, вторых и третьих n строк матрицы D соответственно, d – постоянный $3n$-вектор, p есть вектор-параметр размерности k, $k = n+1, n+2, \ldots, 2n$, выделяет некоторое подмножество оптимальных траекторий, которое обозначим через $M_{k,D,d}^{\alpha}$.

В настоящей статье с использованием результатов работ [1, 2] построены функции $u(t,y,x_1^{(k)})$, где $y=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_1^{(n)},x_1^{(n+1)},\ldots,x_1^{(k-1)}\right)^T$, синтезирующие семейства $M_{k,D,d}^{\alpha}$.

Семейство $M_{k,D,d}^{\alpha}$ при $t\in[0;\alpha]$ совпадает с семейством $M_{k,\widetilde{D}_0,\widetilde{d}_0}$, где $\widetilde{D}_0=\begin{pmatrix}D_1\\ D_2\end{pmatrix}$, $\widetilde{d}_0=\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\end{pmatrix}$, а при $t\in[\alpha;1]$ совпадает с семейством $M_{k,\widetilde{D}_1,\widetilde{d}_1}$, где $\widetilde{D}_1=\begin{pmatrix}D_3\\ BD_1+D_2-BD_3\end{pmatrix}$, $\widetilde{d}_1=\begin{pmatrix}d_3\\ Bd_1+d_2-Bd_3\end{pmatrix}$, d_1,d_2,d_3 – первые, вторые и третьи n компонент вектора d соответственно. Известны функции $u(t,y,x_1^{(k)})$, синтезирующие семейства $M_{k,\widetilde{D}_0,\widetilde{d}_0}$, $M_{k,\widetilde{D}_1,\widetilde{d}_1}$ [1].

Обозначим через $N_k(D_i)$ множество нулей функции $\det\left(\begin{pmatrix}\Phi_1(t)\\ Q^{k-n}\Phi_1^{(n)}(t)\end{pmatrix}D_i\right)$, где $i=0,1$, Q^{k-n} – матрица размера $(k-n)\times n$, первые $(k-n)$ столбцов которой – единичная матрица, а остальные столбцы нулевые. При каждом $n<k<2n$ множества $N_k(D_i)$, $i=0,1$, на отрезке $[0;1]$ конечны, а при $k=2n$ пусты [1].

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Если $x(t)$ – решение системы

$$\dot{x}=Ax+bu\left(t,y,x_1^{(k)}\right), \tag{3}$$

где $y=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_1^{(n)},\ldots,x_1^{(k-1)}\right)^T$, $u\left(t,y,x_1^{(k)}\right)$ определена по формуле

$$u\left(t,y,x_1^{(k)}\right)=\begin{cases}g\left(x_1,\ldots,x_n,x_1^{(n)}\right)^T+x_1^{(k)}-r\Phi^{(k)}(t)G\left(t,y,\widetilde{D}_0,\widetilde{d}_0\right), t\in[0;\alpha],\\ g\left(x_1,\ldots,x_n,x_1^{(n)}\right)^T+x_1^{(k)}-r\Phi^{(k)}(t)G\left(t,y,\widetilde{D}_1,\widetilde{d}_1\right), t\in(\alpha;1],\end{cases} \tag{4}$$

$g=(g_n,g_{n-1},\ldots g_1,1)\in R^{n+1}$, $r=(1,0,\ldots,0)\in R^n$,

$$G\left(t,y,\widetilde{D}_i,\widetilde{d}_i\right)=\widetilde{D}_i\left(\begin{pmatrix}\Phi(t)\\ Q^{k-n}\Phi^{(n)}(t)\end{pmatrix}\widetilde{D}_i\right)^{-1}\left(y-\begin{pmatrix}\Phi(t)\\ Q^{k-n}\Phi^{(n)}(t)\end{pmatrix}\widetilde{d}_i\right)+\widetilde{d}_i,\ i=0,1,$$

$x^{(n)}(t)$ непрерывна в точках множеств $N_k(\widetilde{D}_0)\cap[0;\alpha]$, $N_k(\widetilde{D}_1)\cap[\alpha;1]$, то $x(t)\in M_{k,D,d}^{\alpha}$. Обратно, если $x(t)\in M_{k,D,d}^{\alpha}$, то $x(t)$ – решение системы (3), где $u\left(t,y,x_1^{(k)}\right)$ определена по формуле (4), и $x^{(n)}(t)$ непрерывна в точках множеств $N_k(\widetilde{D}_0)\cap[0;\alpha]$, $N_k(\widetilde{D}_1)\cap[\alpha;1]$.

Доказательство. Рассмотрим систему (3) на отрезке $t\in[0;\alpha]$. На этом отрезке $x(t)$ удовлетворяет системе, где

$$u\left(t, y, x_1^{(k)}\right) = g\left(x_1, \ldots, x_n, x_1^{(n)}\right)^T + x_1^{(k)} - r\Phi^{(k)}(t) G\left(t, y, \widetilde{D}_0, \widetilde{d}_0\right),$$

и $x^{(n)}(t)$ непрерывна на множестве $N_k(\widetilde{D}_0) \cap [0;\alpha]$. Следовательно, $x(t) \in M_{k,\widetilde{D}_0,\widetilde{d}_0}$ [1].

Рассмотрим систему (3) на отрезке $t \in [\alpha;1]$. На этом отрезке $x(t)$ удовлетворяет системе, где $u\left(t, y, x_1^{(k)}\right) = g\left(x_1, \ldots, x_n, x_1^{(n)}\right)^T + x_1^{(k)} - r\Phi^{(k)}(t) G\left(t, y, \widetilde{D}_1, \widetilde{d}_1\right)$, и $x^{(n)}(t)$ непрерывна на множестве $N_k(\widetilde{D}_1) \cap [\alpha;1]$. Следовательно, $x(t) \in M_{k,\widetilde{D}_1,\widetilde{d}_1}$ [1].

В силу изложенного выше, получаем, что $x(t) \in M_{k,D,d}^{\alpha}$, $t \in [0;1]$.

Обратное утверждение теоремы очевидно.

Функцию $u\left(t, y, x_1^{(k)}\right)$, определенную равенством (4), назовем функцией, синтезирующей семейство $M_{k,D,d}^{\alpha}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Огнева Е.А.* Один класс синтезирующих функций линейных систем с квадратичным критерием качества // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд–во Сарат. ун–та, 2000. Вып. 2. С. 89 – 92.
2. *Хромов А.П.* О синтезирующих функциях линейных дифференциальных систем с квадратичным критерием качества // Теория функций и приближений: Тр. 4–й Сарат. зимней шк. Саратов, 1990. Ч. 1. С.106 – 112.

УДК 517.51

В. И. Филиппов

СИСТЕМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ, СОСТОЯЩИЕ ИЗ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ, В ПРОСТРАНСТВАХ E_φ

В 1972 году П.Л. Ульянов [1] рассмотрел систему Фабера-Шаудера в классах $\varphi(L)$ и сформулировал задачу о возможности представления элементов классов $\varphi(L)$ по произвольным функциональным системам. В данной статье рассматривается эта задача П.Л. Ульянова [1, 2] для пространств E_φ, при этом исследуются функциональные системы более общие, чем системы вида

$$\{\psi_{n,k}(t)\} = \{\psi(2^n t - k)\}, \quad n = 0,1,\ldots, \quad k = 0,1,\ldots,2^n - 1, \tag{1}$$

где $\psi \in L^\infty(0,1)$.