$$u\left(t,y,x_1^{(k)}\right)=g\left(x_1,\ldots,x_n,x_1^{(n)}\right)^T+x_1^{(k)}-r\Phi^{(k)}(t)G\left(t,y,\widetilde{D}_0,\widetilde{d}_0\right),$$

и $x^{(n)}(t)$ непрерывна на множестве $N_k(\widetilde{D}_0)\cap[0;\alpha]$. Следовательно, $x(t)\in M_{k,\widetilde{D}_0,\widetilde{d}_0}$ [1].

Рассмотрим систему (3) на отрезке $t\in[\alpha;1]$. На этом отрезке $x(t)$ удовлетворяет системе, где $u\left(t,y,x_1^{(k)}\right)=g\left(x_1,\ldots,x_n,x_1^{(n)}\right)^T+x_1^{(k)}-$ $-r\Phi^{(k)}(t)G\left(t,y,\widetilde{D}_1,\widetilde{d}_1\right)$, и $x^{(n)}(t)$ непрерывна на множестве $N_k(\widetilde{D}_1)\cap[\alpha;1]$. Следовательно, $x(t)\in M_{k,\widetilde{D}_1,\widetilde{d}_1}$ [1].

В силу изложенного выше, получаем, что $x(t)\in M_{k,D,d}^{\alpha}$, $t\in[0;1]$.

Обратное утверждение теоремы очевидно.

Функцию $u\left(t,y,x_1^{(k)}\right)$, определенную равенством (4), назовем функцией, синтезирующей семейство $M_{k,D,d}^{\alpha}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Огнева Е.А.* Один класс синтезирующих функций линейных систем с квадратичным критерием качества // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд–во Сарат. ун–та, 2000. Вып. 2. С. 89 – 92.

2. *Хромов А.П.* О синтезирующих функциях линейных дифференциальных систем с квадратичным критерием качества // Теория функций и приближений: Тр. 4–й Сарат. зимней шк. Саратов, 1990. Ч. 1. С.106 – 112.

УДК 517.51

В. И. Филиппов

СИСТЕМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ, СОСТОЯЩИЕ ИЗ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ, В ПРОСТРАНСТВАХ E_φ

В 1972 году П.Л. Ульянов [1] рассмотрел систему Фабера-Шаудера в классах $\varphi(L)$ и сформулировал задачу о возможности представления элементов классов $\varphi(L)$ по произвольным функциональным системам. В данной статье рассматривается эта задача П.Л. Ульянова [1, 2] для пространств E_φ, при этом исследуются функциональные системы более общие, чем системы вида

$$\{\psi_{n,k}(t)\}=\{\psi(2^n t-k)\},\quad n=0,1,\ldots,\quad k=0,1,\ldots,2^n-1,\tag{1}$$

где $\psi\in L^\infty(0,1)$.

Системы (1) были исследованы в пространствах E_φ в работе [3]. Заметим, что система Фабера-Шаудера, без первых двух элементов, является частным случаем системы (1).

В работах [4, 5] представлены результаты для функциональных систем в пространствах L^p, $0 < p < \infty$, но методы исследований не переносятся на пространства E_φ.

Приведём понятия и утверждения, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Для обозначения меры Лебега множества E будем применять обозначения $|E|$ и $mes(E)$. А $\chi_B(t)$ – характеристическая функция множества E.

Так же как у А.А. Талаляна [6] дадим

Определение 1. Система элементов $\{f_n\}_{n=1}^{n}$ F-пространства $E(E,\|\cdot\|)$ (определение F-пространства [7, с. 81]) называется системой представления (с. п.) в пространстве E, если для произвольного элемента $f \in E$ существует ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty}\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k f_k \right\| = 0,$$

где $\{c_k\}$ – последовательность действительных или комплексных чисел.

Пусть Φ – совокупность чётных, конечных, неубывающих на полупрямой $[0,\infty]$ функций φ таких, что $\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = \infty$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что для функции φ выполнены условия

$$\varphi(x) \in \Phi, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(x) > 0 \quad (x > 0), \quad \varphi(x) \in C[0,\infty). \tag{2}$$

Через $\varphi(L)$ будем обозначать множество всех тех измеримых функций $f(t)$ на T, где (см. [1]; [8, с. 1 – 5])

$$T = (a,b)^n = \underbrace{(a,b)\times(a,b)\times\ldots\times(a,b)}_{n \text{ раз}}, \quad -\infty \le a < b \le +\infty, \quad n \in N,$$

для которых

$$\int_T \varphi(f(t))dt < \infty, \quad t = (t_1, t_2, \ldots, t_n).$$

Если f и g принадлежат классу $\varphi(L)$, то величину $\rho_\varphi(f,g) = \int_T \varphi(f-g)dt$ условно назовём φ – расстоянием.

Класс $\varphi(L)$ в общем случае не является линейным. Если класс $\varphi(L)$ пополнить по линейности, то получим множество $\varphi^*(L)$, в котором можно ввести квазинорму (φ – норму) элементов с помощью функционала

$$\| f \|_{\varphi} = \inf\{u > 0 : \int_T \varphi\left(\frac{f(t)}{u}\right) dt < u\}, \quad f \in \varphi^*(L), \tag{3}$$

так что $\varphi^*(L)$ станет F-пространством. В этом случае из сходимости по φ – норме следует сходимость по φ – расстоянию для элементов из класса $\varphi(L)$ [8, с. 1 – 5)].

Через E_φ обозначим замыкание в $\varphi^*(L)$ множества ограниченных ступенчатых функций. Пространство E_φ является сепарабельным F-пространством [8, с. 36].

Будем говорить, что функция φ удовлетворяет Δ_2 – условию, если $\varphi(2t) = O\{\varphi(t)\}$, $t \to \infty$. В этом случае, если выполнено Δ_2 – условие, то $\varphi(L) = \varphi^*(L) = E_\varphi$ и сходимость по φ – норме эквивалентна сходимости по φ – расстоянию, в противном случае, если Δ_2 – условие не выполнено, то $E_\varphi \subset \varphi(L) \subset \varphi^*(L)$ [8, с. 53] и из сходимости по φ – норме следует сходимость по φ – расстоянию.

Рассмотрим функциональные системы $\{f_k(t)\}_{k=1}^{\infty} \subset L^{\infty}(T)$, удовлетворяющие условиям:

$$f_k(t) > 0, \quad t \in T, \quad M_k = vrai\sup f_k(t) > 0, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Пусть $(\mathrm{supp} f_k)_i$ – это проекция носителя $\mathrm{supp} f_k$ на ось OX_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть

$$B_k^i = vrai\sup(\mathrm{supp} f_k)_i < \infty, \quad A_k^i = vrai\inf(\mathrm{supp} f_k)_i > -\infty, \quad k \in N, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\alpha_k^i = B_k^i - A_k^i, \quad \beta_k^i = A_k^i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad \alpha_k = \left(\alpha_k^1, \ldots, \alpha_k^n\right), \quad \beta_k = \left(\beta_k^1, \ldots, \chi_k^n\right),$$

$$P_k = \left(A_k^1, B_k^1\right) \times \ldots \times \left(A_k^n, B_k^n\right), \quad diam(P_k) \to 0, \quad k \to \infty, \tag{5}$$

где $diam(P_k)$ это диаметр множества [9, с. 30] P_k. Обозначим

$$W_k(\lambda, \tau) = mes\{t \in T: \ \lambda - \tau \le \frac{\lambda f_k(\alpha_k t + \beta_k)}{M_k} \le \lambda\}, \tag{6}$$

где $\lambda \ge \tau > 0$, $k \in N$, $(\alpha_k t + \beta_k) = \left(\alpha_k^1 t_1 + \beta_k^1, \ldots, \alpha_k^n t_n + \beta_k^n\right)$.

Пусть

$$W(\lambda, \tau) = \inf_{k \in N} W_k(\lambda, \tau) \quad \lambda \ge \tau > 0. \tag{7}$$

Очевидно, что $W(\lambda_1, \tau) \ge W(\lambda_2, \tau)$ при $0 < \tau \le \lambda_1 \le \lambda_2$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть система $\{f_k(t)\}_{k=1}^{\infty} \subset L^{\infty}(T)$ удовлетворяет условиям (4), (5) и функция $W(\lambda, \tau) > 0$ при всех $\lambda \ge \tau > 0$. Тогда для того чтобы система $\{f_k\}$ была системой представления в E_φ, необходимо и достаточно, чтобы для любого $N \in \boldsymbol{N}$ выполнялось условие

$$mes\{t : T \setminus \bigcup_{k=N}^{\infty} P_k\} = 0. \tag{8}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть система $\{f_k\} \subset L^p(0,1)$, $1 \le p < \infty$, удовлетворяет условиям:

$$|P_n| \to 0, \quad n \to \infty, \quad |P_n| \ne 0;$$

$$\forall N \in \boldsymbol{N} \quad mes\{(0,1) \setminus \bigcup_{n=N}^{\infty} P_n\} = 0;$$

$$f_n(t) \ge 0, \quad vrai\sup f_n = M_n > 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Тогда, если

$$W(\lambda, \tau) > 0 \quad \forall \lambda \ge \tau > 0,$$

то

$$\sup_n \sigma_n = \sigma < 1, \quad \sigma_n = \inf\{\frac{1}{|P_n|^{1/p}} \|\chi_{P_n} - \lambda f_n\|_p : \lambda \in R\}.$$

Теорема 2 устанавливает связь между теоремой 2 в работе [4] и теоремой 1 данной статьи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ульянов П. Л.* Представление функций рядами и классы $\Phi(L)$ // Успехи математических наук. 1972. Т. 27, № 27. С. 3 – 52.
2. *Ульянов П. Л.* Замечания о сходимости в среднем // Мат. заметки. 1977. Т. 21, № 6. С. 806 – 816.
3. *Филиппов В. И.* Системы функций, получающиеся сжатиями и сдвигами одной функции, в пространствах E_φ с $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{\varphi(t)}{t} = 0$ // Изв. РАН. Сер. Математика. 2001. Т. 65, № 2. С. 187 – 200.
4. *Filippov V. I.* On the completeness and other properties of some function systems in L_p, $0 < p < \infty$ // J. of appr. theory. 1998. № 94. P. 42 – 53.
5. *Filippov V. I., Oswald P.* Representation in L^p by series of translates and dilates of one function // J. of appr. theory. 1995. Vol. 82, № 1. P. 15 – 29.
6. *Талалян А. А.* Об аппроксимационных свойствах некоторых неполных систем // Мат. сборник. 1981. Т. 115 (157), № 4. С. 499 – 541.
7. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
8. *Musielak J.* Orlicz Spaces and Modular Spaces // Lecture Notes in Math. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1983. № 1034.
9. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.