УДК 518.91

В. Е. Фирстов

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА МНОЖЕСТВЕ МАГИЧЕСКИХ МАТРИЦ

Под магической матрицей в общем случае понимается произвольная числовая квадратная матрица, у которой сумма элементов каждой строки, каждого столбца и по каждой диагонали одна и та же. Эта сумма называется магической суммой данной магической матрицы.

В статье рассматриваются магические матрицы, элементами которых являются целые числа. Показано, что на множестве таких магических матриц определяется структура кольца и конечномерного векторного пространства. Эти результаты могут способствовать построению общей алгебраической теории магических матриц, которая до настоящего времени отсутствует [1].

1. Пусть $M(n;Z)$ – множество всевозможных целочисленных магических $(n{\times}n)$-матриц с магическими суммами $S{\in}Z$. Множество $M(n;Z)$, очевидно, образует аддитивную абелеву группу.

На множестве $M(n;Z)$ определяется умножение по правилу

$$\forall(A_1;\ A_2 \in M(n;Z))(A_1A_2 = S_2A_1 \in M(n;Z)), \tag{1}$$

где $S_2 \in Z$ – магическая сумма матрицы A_2. Умножение (1) ассоциативно: $A_1(A_2A_3) = A_1(S_3A_2) = S_3S_2A_1$, $(A_1A_2)A_3 = S_3(A_1A_2) = S_3S_2A_1 \Rightarrow A_1(A_2A_3) = (A_1A_2)A_3$. Следовательно, $M(n;Z)$ с умножением (1) образует полугруппу, которая, очевидно, не является коммутативной и не допускает сокращений.

Сложение и умножение (1) на $M(n;Z)$ связаны левой и правой дистрибутивностями:

$$A_1(A_2 + A_3) = (S_2 + S_3)A_1 = S_2A_1 + S_3A_1 = A_1A_2 + A_1A_3,$$
$$(A_2 + A_3)A_1 = S_1(A_2 + A_3) = S_1A_2 + S_1A_3 = A_2A_1 + A_3A_1.$$

Таким образом, множество $M(n;Z)$ образует некоммутативное кольцо с делителями нуля. Если произвольному элементу кольца $M(n;Z)$ поставить в соответствие его магическую сумму, то, таким образом, порождается эпиморфизм $M(n;Z){\rightarrow}Z$.

Подмножество $M(n;S) \subset M(n;Z)$ образует класс $\overline{\mathbf{M}}(n;S)$ матриц с магической суммой $S \in Z$ и, таким образом, порождается фактор-кольцо $\overline{\mathbf{M}}(n;\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$. Кроме того, подмножество $M(n;S)$ в кольце $M(n;Z)$ порождает двухсторонний идеал, содержащий матрицы с магической суммой кратной S. Поэтому, в принципе, в кольце $M(n;Z)$ можно строить теорию сравнений по таким идеалам. Проще всего, однако, такую теорию строить по идеалу $M(n;\mathrm{O})$, так как его легче построить и в этом случае любой класс $\overline{\mathbf{M}}(n;S)$ по его представителю также строится гораздо легче.

2. Пусть P_n – множество $(n{\times}n)$-матриц перестановок. Определим отображение $P_n \to R^3$ по правилу: всякой матрице из P_n поставим в соответствие вектор $(1;d;d')$, где d; d' – соответственно суммы элементов по главной и побочной диагоналям данной матрицы. Построение множества $M(n;Z)$ реализует следующая

ТЕОРЕМА 1. Каждый класс матриц $\overline{\mathbf{M}}(n;S)$ из $M(n;Z)$ строится с помощью целых решений уравнения:

$$x_1(1;d_1;d_1') + \ldots + x_k(1;d_k;d_k') = (S;S;S), \tag{2}$$

где k зависит от n, причем при $n = 2$ решения существуют только для четных S; при $n = 3$ – только для S кратных 3; при $n > 3$ – решения существуют при всех $S \in Z$.

1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Рис. 1

Матрица из $M(n;Z)$ называется простой, если ее нельзя представить в виде линейной комбинации магических матриц с меньшими (по модулю) магическими суммами. На рис.1 (с точностью до автоморфизмов) показаны простые матрицы при $n = 3$, которые могут быть двух типов: одна матрица типа 1 и 4 матрицы типа 2 (всего 5). При $n = 4$ (рис. 2) простые матрицы существуют 4-х типов: 8 матриц типа 1 с магической суммой $S = 1$; при $S = 2$ имеется 8 матриц типа 2 и по две матрицы для типов 3; 4 (всего 20).

1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Рис. 2

Приведенные системы простых матриц являются линейно зависимыми. Например, при $n = 3$ ранг такой системы $r(3) = 3$; при $n = 4$, $r(4) = 10$. Дальнейшие оценки показывают, что при $n \geq 4$ количество простых матриц в системе превосходит n^2 и поэтому из нее всегда можно выделить базис из $r(n) < n^2$ простых матриц. Следовательно, с учетом теоремы 1, можно считать, что $M(n;Z)$ образует векторное пространство, в общем случае над полем Q, некоторой размерности $r(n)$. Таким образом, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Множество $M(n;Z)$ есть векторное пространство над полем Q, базис которого состоит из $r(n)$ простых матриц и всякая матрица из $M(n;Z)$ однозначно разлагается по этому базису.

Для примера на рис. 3 представлены разложения по базису для «классических» магических матриц (т.е. построенных из чисел $1;2;\ldots;n^2$) размера $n = 3$ и 4.

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} = 9\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ 9\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 10\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Рис. 3

В заключение отметим, что конкретное определение размерности $r(n)$ векторного пространства $M(n;Z)$ в общем случае представляет предмет отдельного комбинаторного исследования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Постников М.М.* Магические квадраты. М.: Наука, 1964.

УДК 517.984

В. А. Халова

О РЕЗОЛЬВЕНТЕ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ*

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим интегральный оператор вида

$$Af(x) = \alpha_1 \int_0^x (x-t) f(t)dt + \alpha_2 \int_0^{1-x} (1-x-t) f(t)dt + \sum_{k=1}^m (f, v_k) g_k(x), \qquad (1)$$

где $(f, v_k) = \int_0^1 f(t) v_k(t) dt$, $v_k(t) \in C^2[0,1]$, $g_k(x) \in C^2[0,1]$, последовательности $\{v_k''(t)\}_1^m$, $\{g_k''(x)\}_1^m$ линейно независимые, $g_k''(x)$ – функции ограниченной вариации, $\beta = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \neq 0$, $x \in [0,1]$.

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00075, и программы «Ведущие научные школы», проект № 00-15-96123.