УДК 517.927.25

А. П. Хромов, Д. Г. Шалтыко

ОБ УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА*

Рассмотрим на отрезке [0;1] краевую задачу, определяемую дифференциальным уравнением

$$y''' + p_2(x)y' + p_3(x)y + \rho^3 y = 0, \ -\frac{\pi}{3} \le \arg(\rho) \le \frac{\pi}{3}, \tag{1}$$

где функции $p_2(x) \in C^1[0;1]$, $p_3(x) \in C[0;1]$ и нормированными краевыми условиями

$$U_\nu(y) = \alpha_\nu y^{(k_\nu)}(0) + \beta_\nu y^{(k_\nu)}(1) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1}\left(\alpha_{\nu j} y^{(j)}(0) + \beta_{\nu j} y^{(j)}(1)\right) = 0, \ \nu = 1,2,3 \tag{2}$$

$$2 \ge k_1 \ge k_2 \ge k_3 \ge 0, \ k_1 > k_3, \ \prod_{\nu=1}^{3}\left(|\alpha_\nu| + |\beta_\nu|\right) \ne 0.$$

Известно [1, с. 58], что дифференциальное уравнение (1) в каждом секторе $S_j = \left\{\frac{\pi(j-2)}{3} \le \arg(\rho) \le \frac{\pi(j-1)}{3}\right\}$, $j = 1,2$, допускает фундаментальную систему решений $\{y_k(x,\rho)\}_{k=1,2,3}$, для которой при больших ρ справедливы асимптотические формулы

$$\frac{d^s}{dx^s} y_k(x,\rho) = (\rho\omega_k)^s e^{\rho\omega_k}\left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right), \quad \omega_k = e^{\frac{2k-1}{3}\pi i}, \quad k = 1,2,3, \quad s = 0,1,2.$$

Предположим также, что характеристический определитель задачи (1), (2) $\Delta(\rho) = \det\left(\|U_\nu(y_k(x,\rho))\|_{\nu,k}\right)$ можно представить в виде

$$\Delta(\rho) = A_0(\rho) + A_1(\rho)e^{\rho\omega_1} + A_2(\rho)e^{\rho\omega_2} + A_3(\rho)e^{\rho\omega_3},$$

причем

$$A_1(\rho) = \alpha\rho^{a_j}\left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right), \ A_3(\rho) = \beta\rho^{b_j}\left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right), \ a_j \le b_j, \ \alpha\beta \ne 0,$$
$$\rho \in S_j, \ j = 1,2.$$

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00075, и программы «Ведущие научные школы», проект № 00-15-96123.

Это означает, что краевые условия (2) являются нерегулярными [1, с. 66], т.е. функция Грина $G(x,t,\rho)$ задачи (1), (2) имеет экспоненциальный рост по спектральному параметру как при $t < x$, так и при $t > x$, что представляет собой основную трудность при решении задачи о разложении по собственным и присоединенным функциям. Впервые подобная задача для простейшего дифференциального уравнения $y''' + \rho^3 y = 0$ и двучленных краевых условий была рассмотрена и полностью решена А.П. Хромовым в работе [2].

Случай экспоненциального роста функции Грина только при $t < x$ или при $t > x$ встречался ранее в краевых задачах с нерегулярными распадающимися краевыми условиями. Такие задачи рассматривались многими авторами [3, 4]. В работе [4] приводится полное решение задачи о сходимости спектральных разложений для краевых задач с нерегулярными распадающимися краевыми условиями.

В настоящей статье получены условия, гарантирующие равномерную сходимость спектральных разложений. К сожалению, полученное достаточное условие значительно более жесткое, чем приводимое необходимое.

Имеет место

ТЕОРЕМА 1. Собственные числа задачи (1), (2) образуют бесконечную последовательность, все они, начиная с некоторого, просты и для них справедливы асимптотические формулы

$$\rho_k = \frac{(2k-1)\pi - \chi}{\sqrt{3}} + i\frac{\ln M}{\sqrt{3}} + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad \text{если} \quad a_j = b_j,$$

$$\rho_k = \frac{(2k+1)\pi - \chi}{\sqrt{3}} + i\frac{\ln M - (b_j - a_j)\ln\frac{2k\pi}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} + o(1), \quad \text{если} \quad a_j < b_j,$$

где $\dfrac{\alpha}{\beta} = Me^{i\chi}$.

Справедлива

ТЕОРЕМА 2 (необходимое условие сходимости). Пусть ряд из собственных и присоединенных функций задачи (1), (2) сходится абсолютно и равномерно при $x \in [x_0; x_1]$ к функции $f(x)$, $\frac{1}{3} < x_0 < x_1 < 1$. Тогда $f(x)$ является операторно-аналитической функцией на интервале $\left(\frac{1}{2} - \frac{x_0}{2}; x_0\right)$.

Предположим теперь, что $f(x)$ – операторно-аналитическая функция на отрезке $[0;1]$, ее обобщенные ряды Тейлора в точках 0 и 1 имеют радиусы сходимости R_0 и R_1 соответственно, причем $R_0 > 1 - R_1$. Пусть, далее, функции $f(x)$, $l(f)$, $l^2(f)$, ... удовлетворяют краевым условиям (2). Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 3 (достаточное условие сходимости). Если $R = \min\{R_0, R_1\} > \frac{1}{2}$, то функция $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд по собственным и присоединенным функциям на отрезке $\left[\frac{1}{2} - \frac{R}{2} + \varepsilon; R - \varepsilon\right]$ для любого $\varepsilon > 0$ т.е. выполняется

$$\lim_{q \to \infty} \max_{\left[\frac{1}{2} - \frac{R}{2} + \varepsilon; R - \varepsilon\right]} \left| f(x) - S_q(f, x) \right| = 0,$$

где $S_q(f, x)$ представляет собой частичную сумму ряда Фурье функции $f(x)$ по собственным и присоединенным функциям задачи (1),(2).

Из теоремы 2 легко получается

СЛЕДСТВИЕ. Если $R > 1$, то функция $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд на всем отрезке $[0;1]$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
2. *Хромов А.П.* Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка // Исследования по теории операторов. Уфа, 1988. С. 182 – 193.
3. *Хромов А.П.* Разложение по собственным функциям обыкновенных дифференциальных операторов с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Мат. сб. 1966. Т. 70 (112). С. 310 – 329.
4. *Хромов А.П.* Дифференциальный оператор с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Мат. заметки. Т. 6, № 6. С. 763 – 772.

УДК 517.51:518

Г. В. Хромова, И. Д. Молоденкова

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ ЗАДАЧИ КОЛМОГОРОВА-НИКОЛЬСКОГО*

В данной статье рассматривается модификация известной задачи из теории приближения функций и дается решение этой модифицированной задачи в случае, когда для приближения периодической функции используется некоторое специфическое семейство интегральных операторов.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00075, и программы «Ведущие научные школы», проект № 00-15-96123.