функции $f(x)$, $l(f)$, $l^2(f)$, ... удовлетворяют краевым условиям (2). Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 3 (достаточное условие сходимости). Если $R=\min\{R_0,R_1\}>\frac{1}{2}$, то функция $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд по собственным и присоединенным функциям на отрезке $\left[\frac{1}{2}-\frac{R}{2}+\varepsilon;R-\varepsilon\right]$ для любого $\varepsilon>0$ т.е. выполняется

$$\lim_{q\to\infty}\max_{\left[\frac{1}{2}-\frac{R}{2}+\varepsilon;R-\varepsilon\right]}\left|f(x)-S_q(f,x)\right|=0,$$

где $S_q(f,x)$ представляет собой частичную сумму ряда Фурье функции $f(x)$ по собственным и присоединенным функциям задачи (1),(2).

Из теоремы 2 легко получается

СЛЕДСТВИЕ. Если $R>1$, то функция $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд на всем отрезке $[0;1]$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

2. *Хромов А.П.* Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка // Исследования по теории операторов. Уфа, 1988. С. 182 – 193.

3. *Хромов А.П.* Разложение по собственным функциям обыкновенных дифференциальных операторов с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Мат. сб. 1966. Т. 70 (112). С. 310 – 329.

4. *Хромов А.П.* Дифференциальный оператор с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Мат. заметки. Т. 6, № 6. С. 763 – 772.

УДК 517.51:518

Г. В. Хромова, И. Д. Молоденкова

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ ЗАДАЧИ КОЛМОГОРОВА-НИКОЛЬСКОГО*

В данной статье рассматривается модификация известной задачи из теории приближения функций и дается решение этой модифицированной задачи в случае, когда для приближения периодической функции используется некоторое специфическое семейство интегральных операторов.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 00-01-00075, и программы «Ведущие научные школы», проект № 00-15-96123.

Пусть $f(x) \in W_2^2[-\pi,\pi]$ и удовлетворяет краевым условиям

$$f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi),\ k = 0,1.$$

Здесь $W_2^2[-\pi,\pi]$ – одномерное пространство Соболева с нормой

$$\|f\|_{W_2^2} = \left(\int_{-\pi}^{\pi}[f^2(x) + (f''(x))^2]dx\right)^{1/2}.$$

Рассмотрим семейство интегральных операторов K_α ($\alpha > 0$ – параметр) с ядрами $K_\alpha(x,t)$ таких, что $K_\alpha f \in C[-\pi,\pi]$ и $\|K_\alpha f - f'\|_{C[-\pi,\pi]} \to 0$ при $\alpha \to 0$. Рассмотрим далее класс функций

$$\widetilde{M}_2^2[-\pi,\pi] = \{f(x) \in W_2^2[-\pi,\pi]:\ f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi),\ k = 0,1;\ \|f\|_{W_2^2} \le 1\}$$

и величины

$$\Delta_1^{(1)}(K_\alpha, \widetilde{M}_2^2) = \sup\{\|K_\alpha f - f'\|_{C[-\pi,\pi]} : f \in \widetilde{M}_2^2[-\pi,\pi]\}.$$

В теории приближения функций известна задача Колмогорова-Никольского – это задача получения представлений вида

$$\Delta_1(K_\alpha, M) = \varphi(\alpha) + \psi(\alpha),$$

где $\Delta_1(K_\alpha, M) = \sup\{\|K_\alpha f - f\|_C : f \in M\}$, K_α – некоторое семейство операторов, “приближающее” функцию $f(x)$ из некоторого класса M, $\psi(\alpha) = o(\varphi(\alpha))$.

В [1], а также в публикациях, приведенных в [1], рассмотрено обобщение этой задачи на более “гладкую” метрику; в случаях, когда

$$M = M_2^r[a,b] = \{f(x) \in W_2^r[a,b] : \|f\|_{W_2^r} \le 1\}$$

и

$$M = \widetilde{M}_2^r[a,b] = \{f(x) \in W_2^r[a,b],\ f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b), k = 0,1,\dots,r-1,\ \|f\|_{W_2^r} \le 1\},$$

$r \ge 1$ – целое, получены выражения для $\Delta_1(K_\alpha, M)$ и для аналогичных величин, соответствующих метрике $C^{(l)}[a,b]$, через ядра $K_\alpha(x,t)$, а на основании этих выражений получено решение указанной задачи для ряда операторов K_α.

По аналогии с рассмотренными выше случаями имеет место

ТЕОРЕМА 1. Справедливо представление

$$\Delta_1^{(1)}(K_\alpha, \widetilde{M}_2^2) = \sup_{-\pi \le x \le \pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} K_\alpha(x,t)\widetilde{g}(x,t,\alpha)dt - \widetilde{g}(x,x,\alpha) \right)^{1/2}, \tag{1}$$

где

$$\widetilde{g}(x,t,\alpha) = \int_{-\pi}^{\pi} K_\alpha(x,\xi)G(t,\xi)d\xi - G_x{}'(t,x), \tag{2}$$

$G(t,x)$ – функция Грина дифференциального оператора

$$L_\Gamma = \{l_\Gamma y = y^{(4)} + y\,,\, y^{(k)}(-\pi) = y^{(k)}(\pi)\,,\; k = 0,1,2,3\}.$$

Функция Грина $G(t,x)$ имеет вид [2, 3]

$$G(t,x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4}\sum\limits_{l=1}^{4} c_l e^{\lambda_l (x-t)}, & t \le x, \\ -\dfrac{1}{4}\sum\limits_{l=1}^{4} c_l e^{\lambda_l [2\pi - (t-x)]}, & x \le t, \end{cases} \tag{3}$$

где $c_l = (1 - e^{2\pi\lambda_l})^{-1}\lambda_l$, $\lambda_l = \sqrt[4]{-1}$.

Из (3) следует выражение

$$G(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\sum\limits_{\substack{l=1 \\ \operatorname{Re}\lambda_l > 0}}^{4} \dfrac{\lambda_l \operatorname{ch}\{\lambda_l[\pi - (x-t)]\}}{\operatorname{sh}\lambda_l \pi}, & t \le x, \\ \dfrac{1}{4}\sum\limits_{\substack{l=1 \\ \operatorname{Re}\lambda_l > 0}}^{4} \dfrac{\lambda_l \operatorname{ch}\{\lambda_l[\pi - (t-x)]\}}{\operatorname{sh}\lambda_l \pi}, & x \le t \end{cases}. \tag{4}$$

Возьмем в качестве семейства интегральных операторов осредняющие операторы $A_H(x,f)$, зависящие от параметра $H = \dfrac{2\pi}{n+1}$, где n – натуральное число, переводящие тригонометрические сплайны, введенные П.-Ж. Лораном [4], в их производные [5]. Ядра этих операторов $K_H(x,t)$ имеют вид

$$K_H(x,t) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i(x)\varphi_i(t),$$

где $s = 3{,}5$ или 7 в зависимости от того, куда попадает x, $\varphi_i(t)$ – линейно независимые функции, получаемые сдвигом, для определения $\alpha_i(x)$ выведены системы линейных алгебраических уравнений [5]. Используя (4) и (2), получена

ЛЕММА. Функция $\widetilde{g}(x,t,H)$ имеет вид

$$
\widetilde{g}(x,t,H)=\begin{cases}
\sum\limits_{j=1}^{3}\left(m_1^{j+1}\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i(x)\sum\limits_{\substack{l=1\\ \mathrm{Re}\,\lambda_l>0}}^{4}\dfrac{\lambda_l^j q(j)\left[\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right]^{j-1}}{4\,\mathrm{sh}\lambda_l\pi}+\right.\\
\left. m_2^{j+1}\sum\limits_{i=k+1}^{s}\alpha_i(x)\sum\limits_{\substack{l=1\\ \mathrm{Re}\,\lambda_l>0}}^{4}\lambda_l^j p(j)\left[\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right]^{j-1}\right)-\\
-\sum\limits_{\substack{l=1\\ \mathrm{Re}\,\lambda_l>0}}^{4}\dfrac{\lambda_l^2\,\mathrm{sh}\{\lambda_l[\pi-(t-x)]\}}{4\,\mathrm{sh}\lambda_l\pi}+o(h^2), & x\le t,\\
\sum\limits_{j=1}^{3}\left(m_1^{j+1}\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i(x)\sum\limits_{\substack{l=1\\ \mathrm{Re}\,\lambda_l>0}}^{4}\dfrac{\lambda_l^j q(j)\left[\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right]^{j-1}}{4\,\mathrm{sh}\lambda_l\pi}+\right.\\
\left.+m_2^{j+1}\sum\limits_{i=k+1}^{s}\alpha_i(x)\sum\limits_{\substack{l=1\\ \mathrm{Re}\,\lambda_l>0}}^{4}\dfrac{\lambda_l^j p(j)\left[\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right]^{j-1}}{4\,\mathrm{sh}\lambda_l\pi}\right)+\\
+\sum\limits_{\substack{l=1\\ \mathrm{Re}\,\lambda_l>0}}^{4}\dfrac{\lambda_l^2\,\mathrm{sh}\{\lambda_l[\pi-(x-t)]\}}{4\,\mathrm{sh}\lambda_l\pi}+o(h^2), & t\le x,
\end{cases}
\qquad (5)
$$

где $m_1=m_2=-1,\quad \left.\begin{array}{l} q(j)=\begin{cases}\mathrm{ch}\lambda_l t, & j \text{ - нечетное},\\ \mathrm{sh}\lambda_l t, & j \text{ - четное},\end{cases}\\ p(j)=\begin{cases}\mathrm{ch}[\lambda_l(2\pi+t)], & j \text{ - нечетное},\\ \mathrm{sh}[\lambda_l(2\pi+t)], & j \text{ - четное},\end{cases}\end{array}\right\}\; \begin{array}{c} s=3,\\ x\in\left[-\pi, x_1-\dfrac{\delta_1}{2}\right],\\ h=\dfrac{13}{42}H.\end{array}$

$$
\left.\begin{array}{l}
m_1=1,\; q(j)=\begin{cases}\mathrm{ch}[\lambda_l(\pi+x_s-t)], & j \text{ - нечетное},\\ \mathrm{sh}[\lambda_l(\pi+x_s-t)], & j \text{ - четное},\end{cases}\\
m_2=-1,\; p(j)=\begin{cases}\mathrm{ch}[\lambda_l(\pi-x_s+t)], & j \text{ - нечетное},\\ \mathrm{sh}[\lambda_l(\pi-x_s+t)], & j \text{ - четное},\end{cases}
\end{array}\right\},
$$

где $s=3,\ x_3=x_n+\frac{\delta_1}{2},\ x\in\left[x_n+\frac{\delta_1}{2},\pi\right],\ h=\frac{13}{42}H;$

$s=5,\ x_5=x_l+\frac{\delta_1}{2};\ l=\overline{1,n-1},\ x\in\left[x_l+\frac{\delta_1}{2},x_{l+1}-\frac{\delta_1}{2}\right],\ h=\frac{6H}{35};$

$s=7,\ x_7=x_l-\frac{\delta_1}{2};\ l=\overline{1,n},\in\left[x_l-\frac{\delta_1}{2},x_l+\frac{\delta_1}{2}\right],\ h=\frac{H}{49}.$

Справедлива

ТЕОРЕМА 2. Имеет место асимптотическое по H при $H\to 0$ представление

$$\Delta_1^1(A_H,\widetilde{M}_2^2)=BH^{1/2}+o\left(H^{1/2}\right),$$

где $$B=\max_s\left(\frac{m}{s}\right)^l\left(\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{s}\alpha_j(x_s)\left(j-\frac{1}{2}\right)\sum_{\substack{l=1\\ \operatorname{Re}\lambda_l>0}}^{4}\frac{\lambda_l^3\operatorname{ch}\lambda_l\pi}{4\operatorname{sh}\lambda_l\pi}\right)^{1/2},\quad s=3,\ m=13,$$

$q=14,\ l=\frac{1}{2},\ x_s=-\pi$ для отрезка $\left[-\pi,x_1-\frac{\delta_1}{2}\right]$, $x_s=x_n+\frac{\delta_1}{2}$ для отрезка $\left[x_n+\frac{\delta_1}{2},\pi\right]$; $s=5,\quad m=6,\quad q=7,\ l=\frac{1}{2},\ x_5=x_l+\frac{\delta_1}{2}$ для отрезка $\left[x_l+\frac{\delta_1}{2},x_{l+1}-\frac{\delta_1}{2}\right]$, $l=\overline{1,n-1}$; $s=7,\ m=1,\ q=1,\ l=1,\ x_7=x_l-\frac{\delta_1}{2}$ для отрезка $\left[x_l-\frac{\delta_1}{2},x_l+\frac{\delta_1}{2}\right]$, $l=\overline{1,n}$.

Доказательство сводится к подстановке (5) в (1) и проведению соответствующих преобразований с учетом того, что $\sum_{i=1}^{s}\alpha_i(x)\equiv 1$ и $t=x$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромова Г.В.* Об оценках погрешности приближенных решений уравнений первого рода // ДАН. 2001. Т. 378, № 5. С. 605 – 609.

2. *Хромова Г.В.* О скорости сходимости приближений функций на некоторых компактных классах и задаче восстановления функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. 1993. № 1. С. 13 –18.

3. *Хромова Г.В., Молоденкова И.Д.* Об оценке погрешности при приближении периодических функций осредняющими операторами // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2000. Вып. 2. С. 129 – 132.

4. *Лоран П.-Ж.* Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, 1975.

5. *Молоденкова И.Д.* Построение операторов, восстанавливающих производные // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 95 – 98.