УДК 517.5

В. И. Шевцов

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА В ВИДЕ СУММЫ ДВУХ РЕШЕНИЙ

Дифференциальные уравнения бесконечного порядка представляют в настоящее время аналитический аппарат, который активно используется во многих вопросах комплексного анализа. Значительный вклад в развитие теории таких уравнений внесли А.Ф. Леонтьев и его ученики. В работах [1, 2] приводится ряд результатов, относящихся к дифференциальным уравнениям бесконечного порядка.

Обозначим через C_ρ класс бесконечно дифференцируемых на отрезке $[-1;1]$ функций таких, что

$$\forall f \in C_\rho \quad \exists m_n \quad \forall n \geq 0: \quad \left| f^{(n)}(x) \right| \leq A_f^{n+1} m_n, \quad x \in [-1;1], \tag{1}$$

где A_f – некоторая постоянная, которая зависит только от функции $f(x)$, $\{m_n\}$ – последовательность неотрицательных чисел такая, что выполнено условие

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln m_n}{n \ln n} < \frac{1}{\rho}, \ 0 < \rho < 1.$$

Отметим, что класс C_ρ в общем случае не является квазианалитическим классом бесконечно дифференцируемых на отрезке $[-1;1]$ функций.

Рассмотрим оператор

$$M_L(f) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f^{(n)}(x), \ x \in [-1;1],$$

характеристическая функция которого $L(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$ является целой функцией порядка ρ, $0 < \rho < 1$.

Отметим некоторые свойства такого оператора.

1. Для любой функции $f \in C_\rho$ функция $\Psi(x) = M_L[f(x)]$ также принадлежит классу C_ρ.

2. Пусть $L(\lambda) = L_1(\lambda) \cdot L_2(\lambda)$, где $L_j(\lambda)$ $(j = 1,2)$ – целые функции порядка не выше ρ, тогда справедливо равенство

$$M_L(f) = M_{L_1}\left[M_{L_2}(f)\right] = M_{L_2}\left[M_{L_1}(f)\right].$$

Доказательство этих свойств оператора $M_L(f)$ приведено в [3].

В данной статье рассматривается следующая задача. Пусть $L(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\lambda^n$ – целая функция порядка ρ такая, что $L(\lambda)=L_1(\lambda)\cdot L_2(\lambda)$, где $L_j(\lambda)$ $(j=1,2)$ – целые функции порядка не выше ρ, $0<\rho<1$, не имеющие общих нулей.

Рассмотрим уравнение

$$M_L(f)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n f^{(n)}(x)=0,\ x\in[-1;1]. \tag{2}$$

В таком случае любое решение уравнения (2) в классе C_ρ представляется в виде

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x),\ M_{L_j}(f_j)=0,\ (j=1,2). \tag{3}$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 1. Для того чтобы любое решение $f\in C_\rho$ уравнения (2) представлялось в виде (3), необходимо и достаточно, чтобы

$$1\equiv L_1(\lambda)\varphi_1(\lambda)+L_2(\lambda)\varphi_2(\lambda), \tag{4}$$

где $\varphi_1(\lambda)$, $\varphi_2(\lambda)$ – целые функции порядка не выше ρ, $0<\rho<1$.

Отметим, что условия вида (4) впервые возникли в работах В.В. Напалкова [4], а затем в работах многих математиков.

Приведем доказательство достаточности. Пусть выполнено условие (4) и $f\in C_\rho$ – решение уравнения (2), тогда

$$f(x)=M_1(f)=M_{L_2\varphi_2}(f)+M_{L_1\varphi_1}(f)=f_1(x)+f_2(x),\ x\in[-1;1].$$

Покажем, что $M_{L_j}(f_j)=0$, $(j=1,2)$. Имеем

$$M_{L_1}(f_1)=M_{L_1}(M_{L_2\varphi_1}(f))=M_{\varphi_2}(M_L(f))=0,$$
$$M_{L_2}(f_2)=M_{\varphi_1}(M_L(f))=0.$$

Здесь мы воспользовались свойствами 1 и 2 оператора $M_L(f)$. Достаточность условий (4) установлена.

Необходимость условий (4) доказывается в основном методом, указанным в работе [5].

Отметим, что данная теорема может быть распространена на случай, когда характеристическая функция уравнения (2) является произведением произвольного числа сомножителей.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $L(\lambda)=L_1(\lambda)...L_m(\lambda)$, где $L_j(\lambda)$ $(j=\overline{1,m})$ – целые функции порядка не выше ρ, не имеющие общих нулей. Для того чтобы любое решение уравнения (2) из класса C_ρ представлялось в виде $f(x)=f_1(x)+...+f_m(x)$, $M_{L_j}(f_j)=0\ (j=\overline{1,m})$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$1 \equiv N_1(\lambda)\varphi_1(\lambda) + \dots N_m(\lambda)\varphi_m(\lambda),$$

здесь $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ – некоторые целые функции порядка не выше ρ, $N_1(\lambda) = \dfrac{L(\lambda)}{L_1(\lambda)}, \dots, N_m(\lambda) = \dfrac{L(\lambda)}{L_m(\lambda)}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Леонтьев А.Ф.* Ряды экспонент. М., 1976.
2. *Леонтьев А.Ф.* Последовательность полиномов из экспонент. М., 1980.
3. *Шевцов В.И.* Об одном квазианалитическом классе функций. Саратов, 2000. 15 с. Деп. в ВИНИТИ 20.04.2000, №1103 – В00.
4. *Напалков В.В.* Факторизация оператора типа свертки // Мат. заметки. 1974. Т. 15, № 1. С. 165 – 171.
5. *Тимофеев А.Ю.* О представлении решения уравнения бесконечного порядка в виде суммы двух решений // Мат. заметки. 1982. Т. 31, № 2. С. 245 – 256.