УДК 539.3

Н. С. Анофрикова, Е. В. Гуреева

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ БЕЗМОМЕНТНЫЕ ВОЛНЫ В НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Рассмотрим осесимметричную задачу о действии ударно приложенного нормального усилия на торец наследственно-упругой цилиндрической оболочки, материал которой обладает свойством упругого объемного расширения. Здесь основной вклад (по интенсивности напряжений и деформаций) вносит безмоментная составляющая по теории Кирхгофа-Лява. Уравнения этой составляющей выводятся из трехмерных уравнений наследственной теории упругости с помощью асимптотического интегрирования и, в случае цилиндрической оболочки, имеют вид

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial T_1}{\partial \alpha} - 2\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\
\frac{T_2}{R} - 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\
2Eh\left(1 - \Gamma^*\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right) = T_1 + \left[\nu + \frac{1-2\nu}{2}\Gamma^*\right]T_2, \\
2Eh\left(1 - \Gamma^*\right)\left(-\frac{w}{R}\right) = T_2 + \left[\nu + \frac{1-2\nu}{2}\Gamma^*\right]T_1,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где T_i – нормальные усилия, u – тангенциальное перемещение, w – прогиб срединной поверхности оболочки, α – координата вдоль образующей срединной поверхности цилиндра, t – время, R – радиус срединной поверхности цилиндра, h – полутолщина, E, ν – мгновенные значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона; ρ – плотность материала.

Рассмотрим случай, когда оператор Γ^* определяется как интегральный оператор Вольтерра, ядром которого служит дробно-экспоненциальная функция $Э_{-1/2}(-\beta, t)$ [1], то есть

$$\Gamma^* f(t) = k\int_0^t Э_{-1/2}(-\beta, t - t_*) f(t_*) dt_*, \tag{2}$$

где k, β – параметры материала.

Граничные условия на торце $\alpha = 0$, соответствующие рассматриваемому типу воздействия, возьмем в виде:

$$T_1 = 2hIH(t), w = 0, \tag{3}$$

где I – амплитуда, $H(t)$ – функция Хевисайда.

Начальные условия:

$$u = \frac{\partial u}{\partial t} = w = \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \text{ при } t = 0. \tag{4}$$

Перейдем в уравнениях (1), граничных условиях (3) и начальных условиях (4) к безразмерным переменным

$$\xi = \frac{\alpha}{R}, \quad \tau = \frac{tc_3}{R} \tag{5}$$

и к безразмерным параметрам

$$k = \sqrt{\frac{c_3}{R}} k^*, \ \beta = \sqrt{\frac{c_3}{R}} \beta^*, \tag{6}$$

где $c_3 = \sqrt{\dfrac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ – мгновенная скорость двумерной продольной волны.

Также введем безразмерные усилия и перемещения

$$T_i = \frac{2Eh}{1-\nu^2} T_i^*, \quad u = Ru^*, \quad w = Rw^*. \tag{7}$$

В результате система (1) примет вид

$$\frac{\partial T_1^*}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} = 0,$$

$$T_2^* - \frac{\partial^2 w^*}{\partial \tau^2} = 0,$$

$$(1-\nu)\left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} - k^*\beta^*\int_0^\tau Э_{-1/2}(-1, \beta^{*2}(\tau - \tau^*))\frac{\partial u^*(\tau^*)}{\partial \xi}d\tau^*\right) = \tag{8}$$

$$= T_1^* - \left(\nu T_2^* + \frac{1-2\nu}{2}k^*\beta^*\int_0^\tau Э_{-1/2}(-1, \beta^{*2}(\tau - \tau^*))T_2^*(\tau^*)d\tau^*\right),$$

$$-(1-\nu)\left(w^* - k^*\beta^*\int_0^\tau Э_{-1/2}(-1, \beta^{*2}(\tau - \tau^*))\, w^*(\tau^*)d\tau^*\right) =$$

$$= T_2^* - \left(\nu T_1^* + \frac{1-2\nu}{2}k^*\beta^*\int_0^\tau Э_{-1/2}(-1, \beta^{*2}(\tau - \tau^*))T_1^*(\tau^*)d\tau^*\right).$$

Граничные условия на торце $\xi = 0$ запишутся в виде

$$T_1^* = I^* H(\tau), w^* = 0, \qquad (9)$$

где $I^* = \frac{I(1-\nu^2)}{E}$.

Начальные условия:

$$u^* = \frac{\partial u^*}{\partial \tau} = w^* = \frac{\partial w^*}{\partial \tau} = 0 \text{ при } \tau = 0. \qquad (10)$$

Применим к решению уравнений (8) интегральное преобразование Лапласа по переменной τ. В результате получим следующее уравнение для нахождения изображения перемещения u^{*L}:

$$\frac{d^2 u^{*L}}{d\xi^2} - \lambda^2 u^{*L} = 0, \qquad (11)$$

где $\lambda = \sqrt{\frac{s^2(E_L + s^2(1-\nu_L^2))}{E_L(E_L + s^2)}}$, $E_L = 1 - \frac{k^*}{s^{1/2} + \beta^*}$, $\nu_L = \nu + \frac{1-2\nu}{2}\frac{k^*}{s^{1/2} + \beta^*}$,

s – параметр интегрального преобразования.

Тогда решение для изображения продольного усилия T_1^{*L} с учетом (9) запишется в форме

$$T_1^{*L} = \frac{I^*}{s} e^{-\lambda\xi}. \qquad (12)$$

Оригинал изображения (12) будем искать аналитически, раскладывая его в ряд по отрицательным степеням параметра преобразования, оставляя в степени экспоненты слагаемые с множителями s, $s^{1/2}$, s^0. Воспользуемся теоремой запаздывания и формулой обратного перехода [2]

$$\frac{1}{s^{1+n/2}} e^{-l\sqrt{s}} \Rightarrow (4\tau)^{n/2} \; i^n erfc \frac{l}{2\sqrt{\tau}} \; (n = 0,1,2,\ldots, l \ge 0), \qquad (13)$$

где $i^n erfc\, z$ – кратные интегралы вероятностей.

Окончательное решение в оригиналах имеет вид

$$T_1^* = I^* e^{-B\xi}\left[i^0 erfc \frac{A\xi}{2\sqrt{\tau-\xi}} - \xi C 2\sqrt{\tau-\xi}\, i^1 erfc \frac{A\xi}{2\sqrt{\tau-\xi}} + \ldots \right] H(\tau - \xi), \qquad (14)$$

где $A = \frac{k^* a}{2}$, $B = \frac{k^*}{8}\left[4a(k^* - \beta^*) - 4k^* b - k^* a^2\right]$,

$$C=\frac{k^*}{16}\Big[4a(k^*-\beta^*)\Big(2(k^*-\beta^*)-k^*a\Big)-4k^*b\Big(2(k^*-2\beta^*)-k^*a\Big)+k^{*2}a^3\Big],$$

$$a=\frac{(1-\nu+\nu^2)}{1-\nu^2},\; b=\frac{(1-2\nu)^2}{4(1-\nu^2)}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М., 1974.
2. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. М., 1979.

УДК 539.3

А. А. Барышев

ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ВИБРАЦИОННОМ ИЗГИБЕ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ И ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ

Полная система разрешающих уравнений для определения напряжённо-деформированного состояния (НДС) и температурного поля вязкоупругой прямоугольной пластины при вибрационном изгибе, учитывающая поперечные сдвиги и инерцию вращения, получена авторами статьи [1]. В этой статье приводятся численные значения максимумов основных характеристик НДС и температуры саморазогрева для различных способов закрепления краев пластины.

Интенсивность нагрузки, распределенной по грани $\zeta=-1/2$, полагается следующая:

$$q(\xi,\eta,t)=q_0\sin\pi\xi\sin\pi\eta\cos\omega t\,. \qquad (1)$$

В силу малости толщины пластинки теплообменом через ее края пренебрегаем, то есть считаем, что края теплоизолированы:

$$\text{при } \xi=0,\ \xi=1\ \ \frac{\partial T}{\partial \xi}=0;\ \text{при } \eta=0,\ \eta=1\ \ \frac{\partial T}{\partial \eta}=0,$$

а на лицевых поверхностях выполняются следующие граничные условия:

$$\text{при } \zeta=\mp 1/2\quad l_k\frac{\partial T}{\partial \zeta}=\pm T\ (k=1,2).$$

С помощью методики, основанной на использовании метода сплайн-коллокаций [2, 3], поиск решения двумерной краевой задачи для определе-