$$C=\frac{k^*}{16}\left[4a(k^*-\beta^*)\left(2(k^*-\beta^*)-k^*a\right)-4k^*b\left(2(k^*-2\beta^*)-k^*a\right)+k^{*2}a^3\right],$$

$$a=\frac{(1-\nu+\nu^2)}{1-\nu^2},\ b=\frac{(1-2\nu)^2}{4(1-\nu^2)}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М., 1974.
2. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. М., 1979.

УДК 539.3

А. А. Барышев

ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ВИБРАЦИОННОМ ИЗГИБЕ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ И ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ

Полная система разрешающих уравнений для определения напряжённо-деформированного состояния (НДС) и температурного поля вязкоупругой прямоугольной пластины при вибрационном изгибе, учитывающая поперечные сдвиги и инерцию вращения, получена авторами статьи [1]. В этой статье приводятся численные значения максимумов основных характеристик НДС и температуры саморазогрева для различных способов закрепления краев пластины.

Интенсивность нагрузки, распределенной по грани $\zeta=-1/2$, полагается следующая:

$$q(\xi,\eta,t)=q_0\sin\pi\xi\sin\pi\eta\cos\omega t\,. \qquad (1)$$

В силу малости толщины пластинки теплообменом через ее края пренебрегаем, то есть считаем, что края теплоизолированы:

$$\text{при } \xi=0,\ \xi=1\ \ \frac{\partial T}{\partial\xi}=0;\ \text{при } \eta=0,\ \eta=1\ \ \frac{\partial T}{\partial\eta}=0,$$

а на лицевых поверхностях выполняются следующие граничные условия:

$$\text{при } \zeta=\mp1/2\quad l_k\frac{\partial T}{\partial\zeta}=\pm T\ (k=1,2).$$

С помощью методики, основанной на использовании метода сплайн-коллокаций [2, 3], поиск решения двумерной краевой задачи для определения НДС сведено к нахождению решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Решение последней получено численно устойчивым методом дискретной ортогонализации С. К. Годунова [4]. Нахождение температуры саморазогрева из краевой задачи для уравнения теплопроводности также основано на последовательном применении методов сплайн-коллокаций и дискретной ортогонализации.

Как и в работе [1], модель А предполагает квадратичное изменение по толщине поперечных сдвигов, в модели Т поперечные сдвиги постоянны по толщине, а модель К основана на гипотезах Кирхгоффа. Соответствующие модели, учитывающие инерцию вращения, обозначены с индексом «и».

Вычислительный эксперимент проводился для случая, когда $l_1 = l_2 = \lambda_q / h\alpha_s^{(k)}$, то есть через грани $\zeta = \mp 1/2$ происходит теплообмен по закону Ньютона ($\alpha_s^{(k)}$ – коэффициент теплоотдачи во внешнюю среду).

Вычисления выполнены для пластин (a=b=0,5 м), изготовленных из материалов ЭД-6 МА, ЭД-6 ТЭАТ и ПММА, физико-механические свойства которых приведены в [3], при единичном параметре нагрузки q_0.

Вычислительные эксперименты были выполнены для пластин, относительная толщина которых изменялась в интервале $h_0 \in [0.02; 0.2]$.

Рассмотрены различные способы закрепления сторон пластины. В случае шарнирного опирания всех краев пластины относительная разность амплитуд прогиба превышает 5% при $h_0 = 0.09$ (модель А и модель К), $h_0 = 0.1$ (модель Т и модель К). При указанных значениях относительной толщины максимальные температуры саморазогрева отличаются не более чем на 3.3%.

При жестко закрепленных краях пластины амплитуды прогибов отличаются более чем на 5 % при тех же относительных толщинах, что и в случае шарнирного опирания краев.

Когда один край жестко закреплен, а остальные шарнирно оперты, то при h_0=0.06 (h_0=0.075) максимальные амплитуды прогиба модели К меньше на 4.6 % (5.5 %), чем соответствующие значения для модели А (Т). Соответствующая этим толщинам максимальная температура не отличается более чем на 5 %.

Качественная картина изменения основных характеристик НДС по длине и ширине пластины, температуры саморазогрева по толщине, а также по длине и ширине для моделей, учитывающих поперечные сдвиги, не отличается от полученной для модели К другими авторами [3].

Результаты расчетов по моделям А и Т хорошо согласуются и в рассматриваемом интервале изменения толщины, относительные разности амплитуд характеристик НДС и температуры не превосходят 5 %.

Отметим, что критическая частота и температура саморазогрева увеличиваются, а амплитуда прогиба уменьшается от модели к модели в следующей последовательности: модели А, Т, К ($А_И$, $Т_И$, $К_И$).

Учет поперечных сдвигов не оказывает влияния на амплитуды изгибающих моментов M_x, M_y, крутящего момента H и перерезывающих сил N_x, N_y. Их можно считать равными в рассматриваемом интервале изменения толщины для всех моделей.

При постоянной интенсивности нагрузки, то есть в случае, когда

$$q(\xi, \eta, t) = q_0 \cos \omega t \qquad (2)$$

и все края пластины шарнирно оперты, максимумы амплитуды прогиба для первых трех критических частот совпадают во всех теориях с точностью до вычислительной погрешности. Температура саморазогрева, начиная со значения h_0=0.1, вычисленная по уточненным теориям, более чем на 5% превосходит соответствующий результат, определенный по классической теории. Перерезывающие силы N_x, N_y, подсчитанные для второй, третьей критических частот, в условиях модели К превышают амплитуды указанных сил в предположениях моделей А и Т. Однако остальные характеристики НДС (изгибающие моменты M_x, M_y, крутящий момент H) хорошо согласуются для первых трех критических частот. Заметим, что значение первой критической частоты при постоянной нагрузке совпадает со значением критической частоты при синусоидальной нагрузке, а максимальные амплитуды всех характеристик НДС и температура саморазогрева значительно превосходят соответствующие величины.

Качественная картина, полученная для моделей, учитывающих поперечные сдвиги, не отличается от результатов модели К.

На основе полученных результатов можно сделать вывод о том, что при рассмотренных способах закрепления краев пластины при $h_0 \leq 0.1$ все рассмотренные теории дают близкие результаты.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Барышев А.А., Недорезов П.Ф.* Постановка задач вибрационного изгиба вязкоупругой прямоугольной пластины с учётом поперечных сдвигов и инерции вращения // Математика. Маханика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 169 – 171.

2. *Недорезов П.Ф., Сироткина Н.М.* Численные методы исследования установившихся колебаний вязкоупругих прямоугольных пластинок и круговых цилиндрических оболочек: Учеб. пособие. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997.

3. *Григоренко Я.М., Крюков Н.Н.* Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (Обзор) // Прикл. механика. 1995. Т. 31, № 6. С. 3 – 27.

4. *Годунов С.К.* О численном решении краевых задач для систем однородных линейных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, № 3. С. 171 – 174.