УДК 533.6.011

Ю. А. Блинков, И. А. Чернов

ОБТЕКАНИЕ ПРОФИЛЯ ГУДЕРЛЕЯ ГАЗОМ ТОМОТИКИ-ТАМАДЫ

Известно, что в классической гидродинамике большую роль играет пример обтекания цилиндра однородным на бесконечности потоком. Это сумма двух простейших решений уравнения Лапласа: диполя на бесконечности и диполя в начале координат. Сумма двух сингулярных решений позволяет правильно отразить топологию симметричного безотрывного обтекания конечного тела. Удачным оказалось то, что нулевая линия тока, разделяющая зоны внешнего и внутреннего течений, является окружностью. Конформное отображение внешности профиля заданного крыла малоскоростного самолета на внешность окружности – это следующий шаг в построении теории.

В аэродинамике при учете сжимаемости среды теряется свойство линейности основного уравнения для функции тока в зависимости от пространственных координат, однако, как показал С.А. Чаплыгин, линейность сохраняется, если использовать метод годографа с переменными «величина скорости – угол скорости» в качестве независимых. Но набор точных решений уравнения Чаплыгина небогат. С другой стороны, здесь возможны различные режимы обтекания конечного тела в зависимости, например, от скорости однородного потока на бесконечности. Интересен, в частности, случай звуковой скорости на бесконечности.

Чтобы расширить теоретические возможности для изучения трансзвукового режима обтекания тел применяют метод аппроксимации уравнения Чаплыгина, которое считается точным, заменяя его приближенным, но обладающим дополнительным набором частных решений. Использование уравнения Трикоми вместо – Чаплыгина можно трактовать как трансзвуковое течение некого фиктивного газа – «газа Трикоми» – со своим законом зависимости плотности газа от его скорости.

Определим «профиль Гудерлея в газе Трикоми» как точное решение уравнения Трикоми, которое является линейной комбинацией на плоскости годографа двух автомодельных решений: соплового с $n=2$ и профильного с $n=4/5$ (n – это показатель степени в автомодельной переменной x/y^n. Соответствующее решение изучалось в [1, 2].

С. Томотика, К. Тамада [3] предложили другую аппроксимацию, заменив уравнение Чаплыгина модельным уравнением, которое правильно описывает течение сжимаемой жидкости не только в трансзвуковом диапазоне скоростей, как уравнение Трикоми, но и при малых скоростях, как уравнение Лапласа. Использование этого модельного уравнения соответствует изучению течения «газа Томотики-Тамады».

Ниже рассмотрено точное решение этого модельного уравнения в виде линейной комбинации двух обобщенных автомодельных (соплового и профильного), которая описывает обтекание газом Томотики-Тамады конечного тела звуковым на бесконечности потоком.

1. Уравнение Чаплыгина для определения функции тока ψ возьмем в форме

$$\psi_{ww} + X(w)\psi_{\theta\theta} = 0. \tag{1}$$

Коэффициент X во втором слагаемом может быть выражен как функция w при помощи уравнения состояния газа и уравнения Бернулли

$$w = \int_1^q \frac{\rho}{q} dq, \qquad X = \frac{q^2}{\rho^2}\left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{c^2}\right),$$

$$\rho = \left(\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2}q^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad c = \rho^{\frac{\gamma-1}{2}},$$

где γ – отношение удельных теплоемкостей газа, q – величина скорости.

В [3] коэффициент $X(w)$ из (1) был заменен на аппроксимирующий

$$X(w) = a\left(1 - e^{2kw}\right), \quad a = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}}, \; k = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}.$$

Были введены новые независимые переменные (τ, β)

$$\tau = e^{kw}, \; \beta = \frac{k}{\sqrt{a}}\theta.$$

Тогда основное уравнение приняло вид

$$\tau^2\psi_{\tau\tau} + \tau\psi_\tau + (1-\tau^2)\psi_{\beta\beta} = 0. \tag{2}$$

Было найдено [3] точное решение этого уравнения

$$\psi_1 = \tau \sin\omega \tag{3}$$

при условии, что

$$\beta - i\ln\lambda + \tau\sin\omega - \omega = 0, \tag{4}$$

где λ – произвольное вещественное число. Его значение влияет на местоположение особой точки этого решения на плоскости годографа. Если ψ_1 – решение (2), то $\psi_2 = \dfrac{\partial\psi_1}{\partial\beta}$ – новое решение. Это дает возможность построить счетное множество частных решений, ассоциированных с (3).

2. Если положить в (4) λ=1, то особая точка решения (3) и всех других ассоциированных с ним будет находиться на звуковой линии, что необходимо при построении течений, в которых звуковая скорость является характерной.

Построим решение по аналогии с примером обтекания профиля Гудерлея газом Трикоми, но теперь для уравнения (2), т.е. возьмем линейную комбинацию двух решений

$$\psi = K\,\mathrm{Re}(\psi_1) + \mathrm{Re}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\beta^2}\right) = \mathrm{Re}\left(K\tau\sin\omega + \frac{\tau\sin\omega}{(1-\tau\cos\omega)^3}\right),$$

где K – постоянная величина.

Соответствующий потенциал скоростей имеет вид

$$\phi = \sqrt{a}K\,\mathrm{Re}\left(\frac{\tau^2}{2} + \tau\cos\omega\right) - \sqrt{a}\,\mathrm{Re}\left(\frac{\tau^2 - \tau\cos\omega}{(1-\tau\cos\omega)^3}\right).$$

Профилю соответствует условие $\psi = 0$, $\beta \neq 0$, при этом достаточно построить его до предельной характеристики (в трансзвуковой зоне влияния).

Уравнения характеристик для (2) записываются в виде

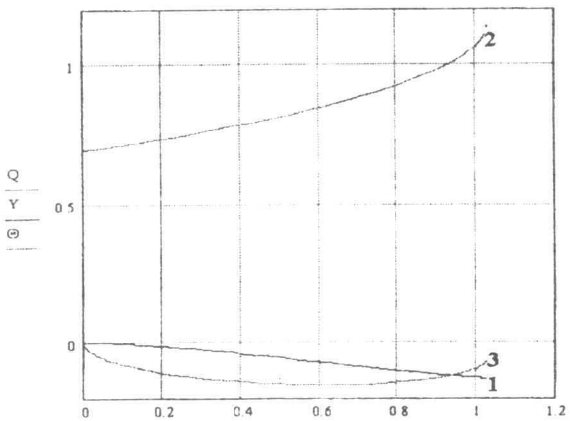
$$\pm(\beta - \beta_0) = \sqrt{\tau^2 - 1} - \arccos\left(\frac{1}{\tau}\right).$$

Предельной характеристике соответствует знак «минус» и $\beta_0 = 0$.

Форма профиля на плоскости (x, y) определяется по формулам

$$x = \int_{\phi_0}^{\phi}\left(\frac{1}{q}\cos\theta\right)_{\psi=0} d\phi, \quad y = \int_{\phi_0}^{\phi}\left(\frac{1}{q}\sin\theta\right)_{\psi=0} d\phi.$$

На рисунке представлены результаты расчётов при $K = -0.4$ трансзвуковой части профиля.



Кривая *1* – это форма профиля (при $y<0$), кривая *2* – зависимость $q(x)$, кривая *3* – зависимость $\theta(x)$

Данное значение K является нижней границей допустимых значений (отсутствие предельной линии в трансзвуковой зоне).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гудерлей К.Г.* Теория околозвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
2. *Личук С.Т.* Обтекание профиля Гудерлея звуковым потоком газа // Аэродинамика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1979. Вып. 7(10). С. 54 – 66.
3. *Томотика С., Тамада К.* Двумерное смешанное течение сжимаемой жидкости. Ч. 3 // Механика: Сб. перев. 1952. Вып. 2(12). С. 31 – 45.

УДК 533. 6. 011: 532. 529

Е. Н. Гамаюнова

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ И ОТРАЖЕНИЙ УДАРНЫХ ВОЛН*

Задача аналитического изучения взаимодействия и отражения относительно слабых ударных волн (УВ) (интенсивности $\mathrm{P}_{10} = (p_1 - p_0)/\mathrm{B}_0$, $\mathrm{P}_{20} = (p_2 - p_0)/\mathrm{B}_0$, $\mathrm{B}_0 = \rho_0 c_0^2$) с углом наклона α к вертикали при различных режимах нерегулярных взаимодействий в газе и газожидкостной среде, характеризуемой параметром $R_0(\gamma)$, сводится к построению решения краевой задачи системы уравнений коротких волн [1] (во внутренних переменных $\mathrm{X}, \mathrm{Y}\,(\delta, \mathrm{Y})$) для компонент скорости μ, ν, удовлетворяющего на фронтах УВ $\delta = \delta^*(\mathrm{Y})$ (Маха, $q_n = 0$; отражённого, $q_n = 1$; отражённого, $q_n = \eta$) условиям динамической совместимости и асимптотическим условиям сращивания на границах с областями линейного и квазиодномерного решения.

Решение задачи ищется с учётом предположения о том, что поперечная составляющая скорости за тройными точками может иметь разрыв ($\Delta\nu_n = \nu_n^+ - \nu_n^-$, $n = 1{,}2$).

Для описания течений в области возмущения за фронтами УВ используется класс параметрических решений, удовлетворяющий точно условиям на фронте при $q = q^* = const$

$$\mu = \varphi_2(q)Y^2 + \varphi_1(q)Y + \varphi_0(q)\;;\; \delta = qY^2 + \chi_1(q)Y + \chi_0(q);$$
$$\nu = \psi_3(q)Y^3 + \psi_2(q)Y^2 + \psi_1(q)Y + \psi_0(q). \qquad (1)$$

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00524.