Данное значение K является нижней границей допустимых значений (отсутствие предельной линии в трансзвуковой зоне).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гудерлей К.Г.* Теория околозвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
2. *Личук С.Т.* Обтекание профиля Гудерлея звуковым потоком газа // Аэродинамика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1979. Вып. 7(10). С. 54 – 66.
3. *Томотика С., Тамада К.* Двумерное смешанное течение сжимаемой жидкости. Ч. 3 // Механика: Сб. перев. 1952. Вып. 2(12). С. 31 – 45.

УДК 533. 6. 011: 532. 529

Е. Н. Гамаюнова

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ И ОТРАЖЕНИЙ УДАРНЫХ ВОЛН*

Задача аналитического изучения взаимодействия и отражения относительно слабых ударных волн (УВ) (интенсивности $\mathrm{P}_{10} = (p_1 - p_0)/\mathrm{B}_0$, $\mathrm{P}_{20} = (p_2 - p_0)/\mathrm{B}_0$, $\mathrm{B}_0 = \rho_0 c_0^2$) с углом наклона α к вертикали при различных режимах нерегулярных взаимодействий в газе и газожидкостной среде, характеризуемой параметром $R_0(\gamma)$, сводится к построению решения краевой задачи системы уравнений коротких волн [1] (во внутренних переменных $\mathrm{X}, \mathrm{Y}\,(\delta, \mathrm{Y})$) для компонент скорости μ, ν, удовлетворяющего на фронтах УВ $\delta = \delta^*(\mathrm{Y})$ (Маха, $q_n = 0$; отражённого, $q_n = 1$; отражённого, $q_n = \eta$) условиям динамической совместимости и асимптотическим условиям сращивания на границах с областями линейного и квазиодномерного решения.

Решение задачи ищется с учётом предположения о том, что поперечная составляющая скорости за тройными точками может иметь разрыв ($\Delta\nu_n = \nu_n^+ - \nu_n^-$, $n = 1,2$).

Для описания течений в области возмущения за фронтами УВ используется класс параметрических решений, удовлетворяющий точно условиям на фронте при $q = q^* = const$

$$\mu = \varphi_2(q)Y^2 + \varphi_1(q)Y + \varphi_0(q)\ ;\ \delta = qY^2 + \chi_1(q)Y + \chi_0(q);$$
$$\nu = \psi_3(q)Y^3 + \psi_2(q)Y^2 + \psi_1(q)Y + \psi_0(q). \qquad (1)$$

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00524.

Схемы нерегулярных взаимодействий и отражений относительно слабых УВ в области параметров α^{ν}, η характеризуются набором констант для верхней (с индексом 1) и нижней (с индексом 2) тройных точек взаимодействия. При допущении разрыва поперечной составляющей скорости, условия динамической совместимости примут вид [2, 3]

$$\nu_n^{\pm} = \mp q_n \mathrm{A}_n \pm \mathrm{B}_n(\mu_n - q_n),\ \nu_n^{\mp} = \mp C_n\mu_n,\ \mathrm{A}_n = \alpha^{\nu} \pm \mathrm{Y}_n,\ \delta_n = \frac{1}{2}\left(q_n + \mathrm{A}_n^2\right), \tag{2}$$

$$\mathrm{B}_n = \beta_n^{\nu} \mp \mathrm{Y}_n,\quad \mathrm{B}_n = \left(\mathrm{A}_n^2 - \mu_n\right)^{1/2},\quad C_n = \gamma_n^{\nu} \pm \mathrm{Y}_n,\quad C_n = \left(q_n + \mathrm{B}_n^2\right)^{1/2},$$

$$\beta_n^{\nu} = \frac{tg\,\beta}{\varepsilon^{1/2}};\quad \gamma_n^{\nu} = \frac{tg\,\gamma}{\varepsilon^{1/2}}.$$

Параметры, определяющие УВ структуры δ_n, Y_n, μ_n, $\nu_n^{\mp}$, $\nu_n^{\pm}$; β_n^{ν}, γ_n^{ν}, q_0 (геометрию фронтов, координаты, углы наклона в тройных точках, распределение параметров вдоль УВ фронтов), удовлетворяют системе 21 алгебраического уравнения, которую можно свести [2, 3] к анализу двух трансцендентных уравнений относительно $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$ для *модели C - развитого нерегулярного взаимодействия ударных волн*

$$\mathrm{A}_1^2 = 3z_1^2 - 2,\quad \mathrm{A}_2^2 = 3z_2^2 - 2\eta,\quad \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 - 2\alpha^{\nu} = \mathrm{A}, \tag{3}$$

$$3z_1^2 - 3z_2^2 - 1 + \eta = (z_1 - z_2)\mathrm{A},$$

$$\mathrm{A}[6z_1^2 - 4 - \eta + (z_1 + z_2 - \mathrm{A})(2z_1 - z_2)] =$$

$$= \sqrt{3z_1^2 - 2} + \eta\sqrt{3z_2^2 - 2\eta} - 2\left[\left(z_1^2 - 1\right)^{3/2} + \left(z_2^2 - \eta\right)^{3/2}\right].$$

Анализ системы (3) позволяет провести классификацию УВ взаимодействий (структур УВ); определить границы областей существования (в плоскости α^{ν}, η) различных УВ структур; рассчитать основные параметры при различных режимах взаимодействия УВ.

$$\nu_n^{\mp} = \mp\frac{\mu_n}{\sqrt{3}}\left(2q_n + \mathrm{A}_n^2\right)^{1/2},\quad \nu_n^{\pm} = \mp q_n\mathrm{A}_n \pm \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\mathrm{A}_n^2 - q_n\right)^{3/2},$$

$$\mu_n = \left(q_n + 2\mathrm{A}_n^2\right)/3,\quad \delta_n = \left(q_n + \mathrm{A}_n^2\right)/2,\quad \mathrm{Y}_n = \pm\left(\mathrm{A}_n - \alpha^{\nu}\right), \tag{4}$$

$$\beta_n^{\nu} = \pm\mathrm{Y}_n + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{A}_n^2 - q_n\right)^{1/2},\quad \gamma_n^{\nu} = \mp\mathrm{Y}_n + C_n,\quad C_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2q_n + \mathrm{A}_n^2\right)^{1/2}.$$

На рисунке изображены расчётные значения параметров $\Delta\nu, \mu, \delta^{\nu}$ в зависимости от α^{ν} при различных η.

Геометрию фронта Маха и значения параметров на нём согласно (1) определим при $q = q_0$, рассчитывая параметр q_0 по формуле

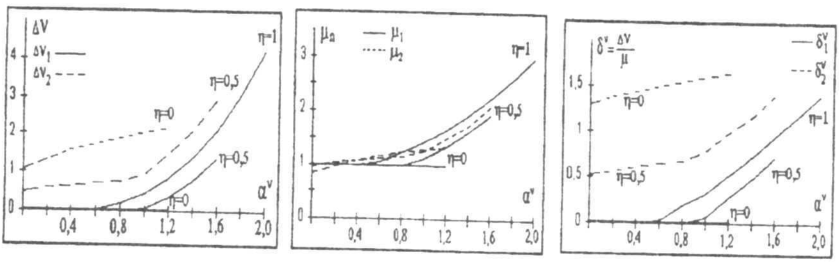
$$q_0 = (C_1 + C_2)/2(\mathrm{Y}_1 - \mathrm{Y}_2).$$

Для отражённых УВ $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$, $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$ при $q^* = q_1$ и $q^* = q_2$, предполагая, что параметры в точке A_n ($\delta = \delta_n, \mu = \mu_n$, $\mathrm{Y} = \mathrm{Y}_n$) известны, а B_n – точка вырождения отражённой УВ ($\mu_n = q_n$, $\delta_n = q_n$), с помощью (1) получим систему двух уравнений относительно q^*, Y_B с решением

$$q^* = \frac{a_n^2}{4(\delta_n - q_n)}, \quad \mathrm{Y}_\mathrm{B} = \mathrm{Y}_n \pm \frac{a_n}{2q^*}, \quad a_n = \sqrt{2\delta_n - \mu_n - q_n}. \tag{5}$$

Используя (3), получим

$$q^* = \frac{1}{6}, \quad \mathrm{Y}_\mathrm{B} = \mathrm{Y}_n \pm \sqrt{3(\mathrm{A}_n^2 - q_n)}. \tag{6}$$



Модель C'' – развитого нерегулярного отражения SMR получим в параметрическом виде при $\eta = 1$, $z_1 = z_2$ (z_1 – параметр), исключая А из 3-го уравнения (3),

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2z_1}\left[8z_1^2 - 5 - \sqrt{(8z_1^2 - 5)^2 - 8z_1(3z_1^2 - 2)^{1/2} + 16z_1(z_1^2 - 1)^{3/2}}\right], 1 \le z_1 \le \sqrt{2},$$

$$\alpha^\nu = \sqrt{3z_1^2 - 2} - \frac{1}{2}\mathrm{A}, \ \mu_1 = 2z_1^2 - 1, \ \mathrm{Y}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{A}, \ q_0 = \frac{z_1}{2\left(\sqrt{3z_1^2 - 2} - \alpha\right)}. \tag{7}$$

Модель B – вырожденного нерегулярного взаимодействия получим в параметрическом виде $z_2/\mathrm{A}, \eta$ (А – параметр) из (3) в случае вырождения отражённой волны в верхней точке взаимодействия при $z_1 = \mathrm{A}_1 = 1$

$$z_2 = \frac{1}{6}\left[\mathrm{A} + \sqrt{(6 - \mathrm{A})^2 - 12(1 - \eta)}\right], \quad \alpha^\nu = \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{A} + \sqrt{3z_2^2 - 2\eta}\right], \quad q_0 = \frac{1 + z_2}{2\mathrm{A}}. \tag{8}$$

Модель B'' – вырожденного нерегулярного отражения NMR получим из (3), (8) при $\eta = 1$ в явном виде

$$A = 2\left(1-\alpha^{\nu}\right), \quad Y_1 = 1-\alpha^{\nu}, \quad q_0 = \frac{1}{2\left(1-\alpha^{\nu}\right)}; \quad 0 \le \alpha^{\nu} \le \frac{1}{2}.$$

Уравнение фронта Маха и выражения для скоростей на нём в этом случае записываются в явном виде

$$\delta = \frac{1}{2\left(1-\alpha^{\nu}\right)} Y^2 + \frac{1}{2}\left(1+\alpha^{\nu}\right), \mu = -\frac{\alpha^{\nu}}{\left(1-\alpha^{\nu}\right)^2} Y^2 + \left(1+\alpha^{\nu}\right),$$

$$\nu = \frac{2\alpha^{\nu}}{\left(1-\alpha^{\nu}\right)^3} Y^3 - \frac{1+\alpha^{\nu}}{1-\alpha^{\nu}} Y. \tag{9}$$

Результаты (4) – (9) характеризуют основные параметры и структуры взаимодействия УВ.

В общем случае для нерегулярных взаимодействий определение параметров q^*, q_0 позволяет рассчитать положение и структуру УВ, распределение параметров на фронтах.

Результаты аналитических исследований позволяют построить [2, 3] общую картину распределения параметров в области возмущения при отражении и взаимодействии УВ с учётом нелинейных особенностей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Шиндяпин Г.П.* Маховское отражение и взаимодействие слабых ударных волн в условиях парадокса Неймана // Изд. РАН. МГЖ.1996. № 2. С. 183 – 190.

2. *Шиндяпин Г.П.* Аналитическое исследование ударно-волновых структур и потоков при отражении и взаимодействии относительно слабых ударных волн // Аэродинамика: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2001. Вып. 15(18). С. 31 – 44.

3. *Шиндяпин Г.П., Гамаюнова Е.Н.* Аналитическое исследование ударно-волновых структур и параметров при нелинейных взаимодействиях ударных волн // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 193 – 196.

УДК 539.3

Ю. П. Гуляев, М. С. Сухоловская

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ В ОКРЕСТНОСТИ КВАЗИФРОНТА

Рассмотрим тонкий полубесконечный вязкоупругий стержень. Вязкоупругие свойства материала будут описываться с помощью определяющих соотношений, взятых в интегрально-операторной форме. Краевая задача при ударном воздействии запишется в виде [1]