УДК 519.63:533

М. М. Карташов, В. В. Ридель

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ НАГРУЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА ПОТОКОМ ВЯЗКОГО ГАЗА

В связанных задачах взаимодействия потока жидкости или газа с плохообтекаемыми телами большое значение имеет закон распределения давления по поверхности тела, который определяет напряженно-деформированное состояние тела. В свою очередь, форма тела, полученная им в результате нелинейного деформирования, оказывает существенное влияние на формирование параметров обтекания. Ярким примером решения нелинейной задачи взаимодействия, полученного методом физических итераций, являются результаты работы [1], в которой мягкая оболочка (МО) может качественно менять свою форму в зависимости от положения точки отрыва на ее поверхности. Зонные схемы обтекания [2] замкнутых МО представлены в [3].

1. Постановка задачи. В настоящей статье рассматривается первая составляющая часть задачи взаимодействия – задача обтекания потоком вязкого нетеплопроводного газа жёсткого бесконечного цилиндра, помещенного поперёк потока (рис. 1). Основное внимание уделяется построению алгоритма численного расчета распределения давления газа по контуру цилиндра с помощью метода конечных элементов (МКЭ) [4, 5]. В начальный момент времени в однородный поток вязкого нетеплопроводного газа перпендикулярно ему помещается жёсткий бесконечный цилиндр. Рассматривается задача плоского обтекания (рис. 1). На бесконечности заданы: скорость потока – U_∞, плотность – ρ_∞, полная энергия – E_∞. Диаметр цилиндра – L. Течение описывается тремя законами сохранения в интегральной форме:

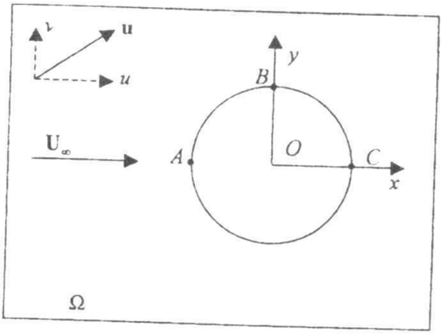

Рис. 1

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho dV + \int\limits_\sigma \rho \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho \boldsymbol{u}\, dV + \int\limits_\sigma \rho (\boldsymbol{u})^2 \cdot d\boldsymbol{\sigma} - \int\limits_\sigma \widetilde{\mathbf{P}} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho E\, dV + \int\limits_\sigma \rho E \boldsymbol{u}\, d\boldsymbol{\sigma} - \int\limits_\sigma \boldsymbol{u}\, \widetilde{\mathbf{P}} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0,$$

где ρ – плотность, $\boldsymbol{u}$ – вектор скорости, E – полная энергия, $\widetilde{\mathbf{P}}$ – тензор напряжений на элементарной площадке для газа, подчиняющегося закону Ньютона для вязких сред,

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} -p-\frac{2}{3\mathrm{Re}}(-2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}) & \frac{1}{\mathrm{Re}}(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}) & 0 \\ \frac{1}{\mathrm{Re}}(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}) & -p-\frac{2}{3\mathrm{Re}}(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}) & 0 \\ 0 & & -p-\frac{2}{3\mathrm{Re}}(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}) \end{pmatrix},$$

его кинематическая вязкость характеризуется μ и $\lambda = -2\mu/3$; V, σ – некоторый фиксированный объём и поверхность его ограничивающая; $d\boldsymbol{\sigma}$ – вектор элемента площади, направление которого совпадает с направлением внешней нормали, а модуль равен площади элемента. Уравнение состояния для идеального нетеплопроводного газа имеет вид $p = \rho\cdot(\gamma-1)\cdot\varepsilon$, где $\varepsilon = E - \boldsymbol{u}^2/2$ – внутренняя энергия, γ – отношение теплоёмкостей.

Начальные условия и условия прилипания для вязкого газа на поверхности цилиндра запишем в виде $\boldsymbol{u} = (U_\infty, 0)$, $E = E_\infty$, $\rho = \rho_\infty$, $\lim\limits_{r\to\infty} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},0) = (U_\infty,0)$ и $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)_{r\in\Sigma} = 0$. Для перехода к безразмерным переменным воспользуемся следующими масштабами: $r \sim L$, $\rho \sim \rho_\infty$, $|\boldsymbol{u}| \sim U_\infty$, $t \sim L/U_\infty$, $E \sim U_\infty^2$, $p \sim \rho_\infty U_\infty^2$. При этом уравнения сохраняют свой вид. Параметрами подобия являются числа Рейнольдса (Re) и Маха (M_∞), причем $E_\infty = 0.5 + \left[(\gamma-1)M_\infty^2\right]^{-1}$.

2. Алгоритм решения. Расчетная область Ω (рис. 1) покрывается сеткой треугольных элементов. На ней аппроксимируются законы сохранения потока массы, количества движения и полной энергии через грань конечного элемента за единицу времени

$$\Delta M = -\Delta t \sum_{i=1}^{3} \rho_i^* \boldsymbol{u}_i^* \boldsymbol{\sigma}_i,$$

$$\Delta \boldsymbol{Q} = \Delta t \sum_{i=1}^{3} \left[\widetilde{\mathbf{P}}_i^* \boldsymbol{\sigma}_i - \rho_i^* (\boldsymbol{u}_i^*)^2 \boldsymbol{\sigma}_i \right],$$

$$\Delta E = \Delta t \sum_{i=1}^{3} \left[\boldsymbol{u}_i^* \widetilde{P}_i^* \boldsymbol{\sigma}_i - \rho_i^* E_i^* \boldsymbol{u}_i^* \boldsymbol{\sigma}_i \right].$$

Символом «*» отмечены параметры, взятые в серединах граняей.

При аппроксимации краевых условий необходимо учитывать, что условия, заданные на бесконечности, сносятся на внешний контур расчетной области (рис. 1). Это ограничивает время расчета, так как отраженные возмущения могут внести изменения в поток.

На контактной границе не определены плотность и энергия. Оказалось, что при квадратичном законе распределения параметров, который принят для внутренних элементов, недостаточно уравнений для нахождения неизвестных. Дополнительное соотношение было выведено на основе гипотезы: производные по нормали к границе от плотности и энергии постоянны в приграничных элементах. Для нахождения недостающих параметров $(\rho, E,)$ на контактной границе и серединах элементах (ρ, E, $\boldsymbol{u}$) воспользуемся формулой приближенного интегрирования второго порядка аппроксимации: $A \sim S(a+b+c)/3$, где A – интеграл от некоторой величины на треугольном элементе, a, b, c – значения этой величины на серединах граней, S – площадь треугольника.

С помощью гипотезы выразим значение на контактной границе через заданное значение на внешней поверхности элемента и серединах прилежащих к границе гранях (рис. 2):

$$a3 \sim [a2h2 + a1(h1 - h2)]/h1.$$

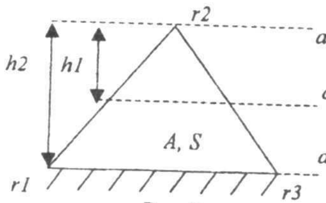

Рис. 2

Шаг по времени выбирался из соображений практической сходимости, которая была определена численным экспериментированием при измельчении Δt и Δs. Ударные начальные условия приводят к тому, что в начальный период времени за цилиндром возникает область сильного разряжения. На этом этапе шаг выбирается так, чтобы относительное изменение параметров было меньше единицы (например, 0.01).

3. Численные эксперименты. В качестве примера расчёта взяты значения: Re=1000, $M_\infty = 0.2$. На рис. 3 приведена эпюра распределения давления газа на верхнюю часть цилиндра в установившемся состоянии течения, а на рис. 4 даны изменения во времени давления в контрольных точках A, B и C, которые характеризуют начальный этап обтекания.

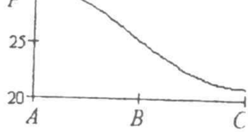

Рис. 3

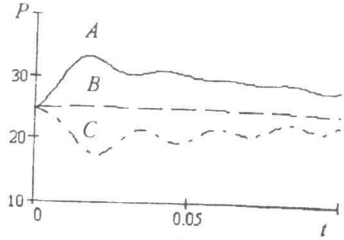

Рис. 4

Картина изолиний на рис. 5 показывает типичное распределение давления в расчетной области.

Полученные результаты качественно согласуются с имеющимися в литературе и показывают работоспособность данного алгоритма, который легко может быть адаптирован для расчета нагружения тел неканонической формы.

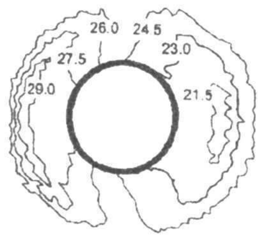

Рис. 5

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гулин Б.В., Ридель В.В., Шагидуллин Р.Р.* Отрывное обтекание мягкой оболочки // Шестая Дальневост. конф. по мягким оболочкам. Владивосток, 1979. С. 123 – 127.

2. *Паркинсон Г., Яндали Т.* Модель следа с источниками за плохообтекаемым телом в потенциальном потоке // Механика: Сб. перев. 1971. Вып. 2(126). С. 86 – 102.

3. *Шагидуллин Р.Р.* Математические проблемы моделирования мягких оболочек. Казань: Изд-во КМО, 2001.

4. *Коннор Дж., Бреббиа К.* Метод конечных элементов в механике жидкости. Л.: Судостроение, 1979.

5. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач: Пер. с англ. Б.И. Квасова / Под ред. Н.Н. Яненко. М.: Мир, 1980.

УДК 533.6.011:532.529

В. А. Китанин, Г. Д. Севостьянов

РАСЧЁТ РЕГУЛЯРНОГО ОТРАЖЕНИЯ ОКОЛОЗВУКОВОГО СКАЧКА ОТ ПЛОСКОЙ СТЕНКИ

Стационарные околозвуковые плоские безвихревые течения идеального газа описываются системой Фальковича-Кармана [1] ($u = M^2 - 1$, M – число Маха)

$$uu_x = v_y, \ \ v_x = u_y, \tag{1}$$

на околозвуковом скачке $x = h(y)$ имеем два условия

$$h' = -\frac{[v]}{[u]}, \ \ (h')^2 = < u >, \tag{2}$$

$[f]$, $< f >$ – разность и полусумма значений f_+ и f_- разрывной на скачке функции f. Тогда уравнение ударной поляры Буземана (1943) имеет вид

$$[v]^2 = < u > [u]^2.$$