(T_2) *для любых* $1 \le i_1, ..., i_p, i_{p+1} \le p+1$

$$(x_1, ..., x_p, x_{p+1}) \in R_p \Longrightarrow (x_{i_1}, ..., x_{i_p}, x_{i_{p+1}}) \in R_p;$$

(T_3) *для любых попарно различных элементов* $x_1, ..., x_p \in X$

$$(x, x_1, ..., x_p), (x_p, x_1, .., y) \in R_p \Longrightarrow (x, x_1, ..., x_{p-1}, y) \in R_p;$$

(T_4) *для любых* $x_1, ..., x_p \in X$, *удовлетворяющих условию* $(x_1, .., x_p, x_p) \in R_p$, *найдется такой отличный от всех них элемент* $x \in X$, *что* $(x_1, .., x_p, x) \in R_p$.

Полученный результат дает алгоритм решения задачи о том, какой конечный автомат является универсальным гиперграфическим автоматом для некоторого эффективного гиперграфа с p-определимыми ребрами. С другой стороны, этот результат позволяет изучать взаимосвязь абстрактных и элементарных свойств универсальных гиперграфических автоматов и их полугрупп входных сигналов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Плоткин Б.И., Гринглаз Л.Я., Гварамия А.А.* Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высш. шк., 1994.
2. *Лендер В.Б.* Об эндоморфизмах проективных геометрий // Исследования алгебраических систем: Мат. записки Урал. ун-та. Свердловск, 1984. С. 48-50.
3. *Молчанов А.В.* Об определяемости гиперграфических автоматов их выходными функциями // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов, 1998. Вып. 2. С. 74-84.
4. *Зыков А.А.* Гиперграфы // УМН. 1974. Т. 29, №6. С. 89-154.

УДК 519.642.8

А.А. Хромов

ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С ПОМОЩЬЮ СУММ ФЕЙЕРА

В данной статье результаты, полученные в [1] для простейшего интегрального уравнения первого рода, обобщаются на интегральное уравнение Вольтерра.

Рассмотрим уравнение

$$Au \equiv \int_0^x A(x,t)u(t)dt = f(x), \qquad (1)$$

где $A(x,t)$ удовлетворяет следующим условиям: $A_x(x,t)$, $A_{xt}(x,t)$ непрерывны, $A(x,x)=1$, $A_x(x,t)_{|t=x}=0$, оператор A действует в пространстве $C[0,1]$, а $f(x)$ задана ее δ-приближением $f_\delta(x)$.

Из теории интегральных уравнений известно [2]: $A^{-1}f = f' + Nf'$, где N — интегральный оператор:

$$N = -A_x + A_x^2 - A_x^3 + \dots$$

(A_x — интегральный оператор с ядром $A_x(x,t)$).

Продолжим функцию $u(x)$ на отрезок $[-1,0]$ четным образом, а затем полученную функцию продолжим периодически на всю вещественную ось. В результате получим функцию $\tilde{u}(x)$.

Пусть F_n — оператор Фейера [3]. Рассмотрим

$$F_n\tilde{u} = \int\limits_{-1}^{1} F_n(x,t)\tilde{u}(t)dt,$$

где $F_n(x,t) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\cos k\pi(t-x)$.

Определим оператор $\tilde{F}_n$ из равенства $\tilde{F}_n u = F_n\tilde{u}$.

Очевидно, $\tilde{F}_n$ — интегральный оператор с ядром

$$\tilde{F}_n(x,t) = F_n(x,t) + F_n(x,-t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\cos k\pi t\cos k\pi x. \qquad (2)$$

Построим операторы $R_n = \tilde{F}_n A^{-1}$.

Теорема 1. *Операторы R_n имеют вид $R_n = R_n^\circ + R_{nN}$, где*

$$\begin{aligned} R_n^\circ f = &\left[1 + 2\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1-\tfrac{k}{n}\right)(-1)^k\cos k\pi x\right]f(1) + \\ &+ 2\pi\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1-\tfrac{k}{n}\right)k\cos k\pi x\int\limits_0^1 \sin k\pi t f(t)dt, \end{aligned} \qquad (3)$$

$$R_{nN}f = \int\limits_0^1\int\limits_t^1 \tilde{F}_n(x,\tau)N_t'(\tau,t)d\tau f(t)dt, \qquad (4)$$

$N(\tau,t)$ — ядро оператора N.

Доказательство. Очевидно, $R_n f = \tilde{F}_n f' + \tilde{F}_n N f'$.

Далее,

$$\tilde{F}_n f' = \int\limits_0^1 \tilde{F}_n(x,t)f'(t)dt = \tilde{F}_n(x,1)f(1) - \int\limits_0^1 F_{n_t}'(x,t)f(t)dt.$$

Подставляя сюда (2), получим (3). Далее,

$$\tilde{F}_n N f' = \int\limits_0^1 \tilde{F}_n(x,t) \int\limits_0^t N(t,\tau) f'(\tau) d\tau\, dt.$$

Берем внутренний интеграл по частям.

Учитывая, что $N(t,t) = 0$, $f(0) = 0$, получим

$$\int\limits_0^t N(t,\tau) f'(\tau) d\tau = -\int\limits_0^t N'_\tau(t,\tau) f(\tau) d\tau.$$

Подставляем этот интеграл в выражение для $\tilde{F}_n N f'$, меняем порядок интегрирования, затем меняем ролями τ и t. В результате получаем (4).

Получим оценки сверху и снизу для норм операторов R_n.

Теорема 2. *Операторы R_n являются ограниченными при каждом фиксированном n, и для их норм справедлива двусторонняя оценка, асимптотическая по n при $n \to \infty$*

$$n + \psi_2(n) \le \|R_n\| \le \frac{2}{3} n^2 + \psi_1(n),$$

где $\psi_1(n) = O(n)$, $\psi_2(n) = O(1)$.

Доказательство. Оценим сначала $\|R_n^\circ\|$. Имеем

$$\begin{aligned} |R_n^\circ f| \le & \left|1 + 2\sum_{k=1}^n \left(1 - \tfrac{k}{n}\right)(-1)^k \cos k\pi x\right| \|f\|_C + \\ & + 2\pi \left|\sum_{k=1}^n \left(1 - \tfrac{k}{n}\right) k \cos k\pi x \int\limits_0^1 \sin k\pi t\, f(t) dt\right|. \end{aligned} \tag{5}$$

Очевидно, первое слагаемое оценивается сверху константой $(1 + 2n)\|f\|_C$. При оценке второго слагаемого в (5) отметим, что $\sum\limits_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) k = \frac{n^2-1}{6}$, а $\int\limits_0^1 |\sin k\pi t|\, |f(t)| dt \le \frac{2}{\pi}\|f\|_C$. Тогда второе слагаемое оценится сверху константой $\frac{2}{3}n^2 - \frac{2}{3}$. Отсюда получим оценку

$$\|R_n^\circ\| \le \frac{2}{3} n^2 + 2n + \frac{1}{3}. \tag{6}$$

Далее, очевидно, что

$$\begin{aligned} & \|R_n^\circ\| \ge |R_n f_0|_{f_0 = 1,\, x = 0} = \\ & = 1 + 2\sum_{k=1}^n \left(1 - \tfrac{k}{n}\right)(-1)^k + 2\pi \sum_{k=1}^n \left(1 - \tfrac{k}{n}\right) k \int\limits_0^1 \sin k\pi t\, dt. \end{aligned}$$

Поскольку $k\int\limits_0^1 \sin k\pi t\, dt = \frac{1}{\pi}(1-(-1)^k)$, то

$$\|R_n^\circ\| \geq 1 + 2n - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n} = n. \tag{7}$$

Теперь оценим $\|R_{nN}\|$. Имеем $R_{nN}f = \tilde{F}_n N_1$, где $N_1(t) = -\int\limits_0^t N'_\tau(t,\tau)f(\tau)d\tau$.

Построим по аналогии с $\tilde{u}(x)$ периодическое продолжение $\tilde{N}_1(t)$ функции $N_1(t)$. Тогда будем иметь

$$|R_{nN}f| = |F_n\tilde{N}_1| \leq \|\tilde{N}_1\|_{C[-1,1]}\int\limits_{-1}^{1}|F_n(x,t)|dt.$$

Но $\int\limits_{-1}^{1}|F_n(x,t)|dt = \int\limits_{-1}^{1}F_n(x,t)dt = 1$ [3] в силу положительности ядра Фейера, а $\|\tilde{N}_1\|_{C[-1,1]} = \|N_1\|_{C[0,1]} \leq C\|f\|_{C[0,1]}$, где $C = \max\limits_t \int\limits_0^t |N'_\tau(t,\tau)|d\tau$. Отсюда следует оценка

$$\|R_{nN}\| \leq C. \tag{8}$$

Из (6),(7),(8) и оценки

$$\|R_n^\circ\| - \|R_{nN}\| \leq \|R_n\| \leq \|R_n^\circ\| + \|R_{nN}\|$$

вытекает утверждение теоремы.

Следствие. *Для того чтобы*

$$\Delta(u, R_n, \delta) \equiv \sup\{\|R_n f_\delta - u\|_C : \|f_\delta - f\|_C \leq \delta\} \to 0$$

при $\delta \to 0$, необходимо выбрать $n = n(\delta)$ так, чтобы $n(\delta)\delta \to 0$ и достаточно – так, чтобы $n^2(\delta)\delta \to 0$ при $\delta \to 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06–01–00003).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромов А.А.* Приближение решений простейшего интегрального уравнения с помощью сумм Фейера // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 14-й Сарат зим. шк., посв. памяти акад. П.Л. Ульянова. Саратов, 28 янв. – 4 февр. 2008 г. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2008. С. 199-200.

2. *Михлин С.Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. М. 1959. 232 с.

3. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.:Наука. 1977. 508 с.