раскладывается по направлениям основы и утка ткани и возбуждает в ней волновой процесс. Ориентация выделенных на рис. 3 градиентов усилий и скоростей связана с направлениями анизотропии. Наиболее четко определяются сдвиговые волны: возмущения, распространяющиеся вдоль основы и утка, порождают фронты $DE$, $DF$ и $BA$, $BC$, а вдоль боковых кромок – дифрагированные волны $AN$ и $EG$. Усилия $T_o$ и $T_y$ достигают максимальных значений (~0.1) в окрестностях точек $B$ и $D$.


БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ридель В.В., Гулин Б.В.* Динамика мягких оболочек. М.: Наука, 1990.
2. *Кольский Г.* Волны напряжения в твёрдых телах. М.: Изд-во иностр. лит., 1955.
3. *Ильгамов М.А., Иванов В.А., Гулин Б.В.* Расчёт оболочек с упругим заполнителем. М.: Наука, 1997.



УДК 301.15.15.07.02



**Я. Г. Сапунков**


## КВАТЕРНИОННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ОРБИТЫ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ВСТРЕЧИ ДВУХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ*


С помощью принципа максимума Понтрягина решена с использованием векторных или кватернионных элементов орбиты пространственная задача оптимального управления о встрече двух космических аппаратов (КА), один из которых движется по эллиптической орбите только под действием силы притяжения к центру. Уравнения движения КА в этих переменных являются регулярными и обладают структурой удобной для численного решения задач оптимального управления с применением ЭВМ.


**1.** В безразмерных кватернионных элементах орбиты движение КА описывается уравнениями [1]

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\varphi} = -\varepsilon Q\mathbf{F}_1 \sin\varphi, \quad \frac{d\mathbf{B}}{d\varphi} = \varepsilon Q\mathbf{F}_1 \cos\varphi, \quad \frac{dt}{d\varphi} = u^2\sqrt{2Q}, \quad Q = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2,$$

$$\mathbf{q} = P(\mathbf{u})\mathbf{p}, \quad \mathbf{F}_1 = \mathrm{u}^2\mathbf{q} + (\mathbf{w},\mathbf{q})\mathbf{w}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{A}\cos\varphi + \mathbf{B}\sin\varphi, \quad \mathbf{w} = -\mathbf{A}\sin\varphi + \mathbf{B}\cos\varphi, \quad (1)$$

где $P(\mathbf{u})$ –матрица, с помощью которой вектора $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$, определяющие положение и скорость КА в пространстве, выражаются через $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$[2]


* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта 02-01-00988.

$$P(\mathbf{u}) = \begin{Vmatrix} u_0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ -u_2 & u_1 & u_0 \\ -u_3 & -u_0 & u_1 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{r} = P^T(\mathbf{u})\mathbf{u}, \mathbf{v} = \frac{2}{r(2Q)^{1/2}} P^T(\mathbf{u})\mathbf{w}, \tag{2}$$

на безразмерный управляющий параметр **p** тяги наложено ограничение

$$|\mathbf{p}| \le 1, \tag{3}$$

$\varepsilon$ – отношение максимальной тяги к характерному значению силы притяжения аппарата к центру, $\varphi$ – независимая переменная, $t$ – время, $(\mathbf{u},\mathbf{q})$ обозначает скалярное произведение двух четырехмерных векторов, $P^T(\mathbf{u})$ – транспонированная матрица. Кватернионные элементы орбиты космических аппаратов удовлетворяют условию

$$l(\mathbf{A},\mathbf{B})=A_0B_1-A_1B_0+A_2B_3-A_3B_2=0.$$

Для перехода к размерным переменным, которые определяют положение и скорость КА, время и вектор тяги, необходимо безразмерные величины умножить на масштабные множители $R$, $(\gamma M/R)^{1/2}$, $R^{3/2}/(\gamma M)^{1/2}$, $p^*_{\max}$ соответственно. Здесь $R$ – масштаб длины (например, большая полуось орбиты), $\gamma$ – гравитационная постоянная, $M$ – масса центра притяжения, $p^*_{\max}$ – максимальная тяга двигателя КА.

В начальный момент состояние КА определяется соотношениями

$$t=0\,, \quad \varphi=0\,, \quad \mathbf{A}=\mathbf{A}_н\,, \quad \mathbf{B}=\mathbf{B}_н\,. \tag{4}$$

Движение неуправляемого аппарата в безразмерных кватернионных переменных описывается соотношениями

$$\mathbf{u}_a=\mathbf{A}_a\cos\varphi_a+\mathbf{B}_a\sin\varphi_a,\ \mathbf{w}_a=-\mathbf{A}_a\sin\varphi_a+\mathbf{B}_a\cos\varphi_a,\ Q_a=\mathbf{A}_a^2+\mathbf{B}_a^2,\ \mathbf{A}_a=\text{const},\ \mathbf{B}_a=\text{const},$$

$$\frac{dt}{d\varphi_a} = u^2(2Q_a)^{1/2}, \text{ при } \varphi_a=0\ \ t=0. \tag{5}$$

Величина $\varphi_a$ является независимой переменной для описания движения неуправляемого аппарата и связана с $\varphi$ соотношением

$$\frac{d\varphi_a}{d\varphi} = \frac{u^2}{u_a^2}\left(\frac{Q}{Q_a}\right)^{1/2}, \text{ при } \varphi=0\ \ \varphi_a=0. \tag{6}$$

Мягкая встреча управляемого и неуправляемого аппаратов определяется условиями

$$P^T(\mathbf{u}(\varphi_k))\mathbf{u}(\varphi_k)=P^T(\mathbf{u}_a(\varphi_a(\varphi_k)))\mathbf{u}_a(\varphi_a(\varphi_k)), \tag{7}$$

$$Q_a^{1/2}P^T(\mathbf{u}(\varphi_k))\mathbf{w}(\varphi_k)=Q^{1/2}(\varphi_k)P^T(\mathbf{u}_a(\varphi_a(\varphi_k)))\mathbf{w}_a(\varphi_a(\varphi_k)). \tag{8}$$

Жёсткая встреча определяется только условием (7). Значение $\varphi_k$ заранее не задается. Качество процесса управления определяется функционалом

$$I = \int_0^{t_k}\left(\alpha_1 + \alpha_2\varepsilon^2 p^2\right)dt = \int_0^{\varphi_k}\left(\alpha_1 + \alpha_2\varepsilon^2 p^2\right)u^2(2Q)^{1/2}d\varphi, \tag{9}$$

представляющим собой свёртку с весовыми множителями $\alpha_i \geq 0$ ($i=1, 2$) двух критериев, определяющих длительность процесса и затраченную энергию.

Требуется найти допустимое управление, удовлетворяющее ограничению (3), которое переводит управляемую систему (1), (6) из начального состояния (4) на перемещающееся многообразие (7), (8) или (7) в зависимости от варианта встречи (мягкая или жёсткая встреча) и сообщает минимальное значение функционалу (9).

**2.** Функция Гамильтона-Понтрягина $H$ имеет вид

$$H=-\varepsilon(\alpha_1+\alpha_2\varepsilon^2p^2)u^2Q^{1/2}+\varepsilon Q(\mathbf{F}_1,\Pi)+\varepsilon\theta\frac{u^2}{u_a^2}\left(\frac{Q}{Q_a}\right)^{1/2},\ \Pi=\psi_b\cos\varphi-\psi_a\sin\varphi\,, \quad (10)$$

где $\psi_a, \psi_b$ – сопряжённые четырёхмерные переменные, и скалярная переменная $\theta$ удовлетворяют сопряженной системе уравнений, которая имеет вид

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}_\mathbf{a}}{d\varphi}=\varepsilon(\mathbf{F}_2\cos\varphi+\mathbf{F}_3\sin\varphi+\mathbf{A}F_4),\quad \frac{d\boldsymbol{\psi}_\mathbf{b}}{d\varphi}=\varepsilon(\mathbf{F}_2\sin\varphi-\mathbf{F}_3\cos\varphi+\mathbf{B}F_4),\quad \theta=C_1u_a^2Q_a^{1/2},$$

$$\mathbf{F}_2=2Q^{1/2}[\alpha_1+\alpha_2\varepsilon^2\mathrm{p}^2-Q^{1/2}(\mathbf{q},\boldsymbol{\Pi})-C_1]\mathbf{u}-QP(u^2\boldsymbol{\Pi}+\mathbf{w}(\mathbf{w},\boldsymbol{\Pi}))\mathbf{p},$$

$$\mathbf{F}_3=Q[(\mathbf{w},\mathbf{q})\boldsymbol{\Pi}+(\mathbf{w},\boldsymbol{\Pi})\mathbf{q},\quad F_4=u^2Q^{-1/2}(\alpha_1+\alpha_2\varepsilon^2\mathrm{p}^2-C_1)-2(\mathbf{F}_1,\boldsymbol{\Pi}),\quad C_1=const. \quad (11)$$

Из условия максимума следует, что вектор оптимального управления $\mathbf{p}_{opt}(\varphi)$ определяется из соотношений

$$\overline{\overline{\mathbf{p}_{opt}}}=\frac{Q^{1/2}}{2\alpha_2\varepsilon^2u^2}P^T(\mathbf{u})\left(u^2\boldsymbol{\Pi}+\mathbf{w}(\mathbf{w},\boldsymbol{\Pi})\right),$$

$$\mathbf{p}_{opt}=\overline{\overline{\mathbf{p}_{opt}}},\ \text{если}\ \left|\overline{\overline{\mathbf{p}_{opt}}}\right|\leq 1,\quad \text{или}\quad \mathbf{p}_{opt}=\frac{\overline{\overline{\mathbf{p}_{opt}}}}{\left|\overline{\overline{\mathbf{p}_{opt}}}\right|},\ \text{если}\ \left|\overline{\overline{\mathbf{p}_{opt}}}\right|>1. \quad (12)$$

Правый конец траектории находится на перемещающемся многообразии в фазовом пространстве и на нем должны выполняться условия трансверсальности, которые в случае мягкой встречи имеют вид

$$l(\psi_a,\mathbf{A})+l(\psi_b,\mathbf{B})=0\,,\quad l(\boldsymbol{\Pi},\mathbf{u})=0,\ \varepsilon\theta+(\boldsymbol{\psi}_a,\mathbf{B})-(\boldsymbol{\psi}_b,\mathbf{A})=0,\ H-\varepsilon\theta=0. \quad (13)$$

В случае жёсткой встречи условия трансверсальности запишутся в виде

$$l(\boldsymbol{\psi}_a,\mathbf{A})+l(\boldsymbol{\psi}_b,\mathbf{B})=0,\quad \boldsymbol{\Pi}=0,\quad \varepsilon\, u^2\theta+(P^T(\mathbf{u}_a)\mathbf{w}_a, P^T(\mathbf{u},\boldsymbol{\Phi}))=0,$$
$$u^2H+(P^T(\mathbf{u})\mathbf{w}, P^T(\mathbf{u},\boldsymbol{\Phi}))=0,\quad \text{где}\ \boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\psi}_a\cos\varphi+\boldsymbol{\psi}_b\sin\varphi. \quad (14)$$

Решение поставленной задачи оптимального управления сводится к решению краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (1), (11) с учётом (12) с начальными условиями (4) и граничными условиями (7), (8), (13) или (7), (14) в зависимости от варианта встречи на правом конце траектории.

**3.** Для решения краевой задачи разработан метод, сочетающий модифицированный метод Ньютона и метод градиентного спуска. Метод реализован в программе на языке PASCAL. Ниже приведены результаты расчёта для случая, когда $\alpha_1$=0.2, $\alpha_2$=40, $\varepsilon$=0.2. В начальный момент времени управляемый КА движется по круговой орбите Земли и начинает движение для мягкой встречи с КА, который движется по эллиптической орбите в плоскости несовпадающей с плоскостью орбиты Земли. В таблице в безразмерных переменных приведены координаты положения и вектора скорости космических аппаратов.

**Таблица фазовых состояний КА** (в безразмерных переменных)

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 |
| 2.3100 | 0.7500 | 0.1750 | -0.1006 | 0.6037 | 0.1409 |
| 2.3320 | 0.1830 | 0.0427 | 0.0557 | 0.6348 | 0.1481 |

В первой строке таблицы указано начальное состояние управляемого аппарата, во второй – неуправляемого, а в третьей – их состояние в момент мягкой встречи. В безразмерных переменных длительность перелёта равна 21.6153 или 3.4402 земных года.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника.II // Космич. исслед. 1993. Т. 31, вып. 3. С. 3 – 15.

2. *Сапунков Я.Г.* Применение KS-переменных к задаче оптимального управления космическим аппаратом // Космич. исслед. 1996. Т. 34, вып. 4. С. 428 – 433.

УДК 533.6011

**Я. Г. Сапунков, Г. П. Шиндяпин, В. А. Поршнев, В. Н. Федорец**

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ В КАМЕРЕ ДЕТОНАЦИОННОГО ДВИГАТЕЛЯ*

В статье метод расчёта движения продуктов детонации в цилиндрической детонационной камере длиной $l_1$ [1] обобщается на случай, когда к камере присоединен диффузор длиной $l_0$ с углом полураствора $\alpha$, заполненный нейтральным газом (воздухом).

* Работа выполнена при поддержке Министерства образования РФ, научно-технической программы, проект № 01.01.030.