В выходном сечении диффузора выполняется условие для давления

$$t>0,\ x=l_1+l_0,\ p=p_0. \qquad (7)$$

При этом проверяется выполнение ограничения на скорость: скорость течения газов в выходном сечении меньше или равна скорости звука. Если это условие нарушается, то давление в выходном сечении диффузора определяется из условия, что скорость течения газов в выходном сечении равна скорости звука.

Таким образом, параметры течения продуктов детонации и воздуха в детонационном двигателе определяются в результате решения краевой задачи для систем дифференциальных уравнений (1) и (2) для продуктов детонации и воздуха соответственно с начальными условиями (3) и граничными условиями (4) – (7).

3. Результаты расчёта. Для решения краевой задачи с использованием ЭВМ составлена программа на языке PASCAL, в которой реализован метод Лакса-Вендроффа. Расчёты и проведенные эксперименты показывают, что наличие диффузора увеличивает суммарный импульс давления детонационного двигателя на 30%.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Сапунков Я.Г., Шиндяпин Г.П., Поршнев В.А., Федорец О.Н.* Математическая модель детонационного двигателя // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 178 – 181.

УДК 232.5; 232.135

М. И. Сафрончик

СВЕДЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ СРЕДЫ К СИСТЕМЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается течение вязкопластичной среды по наклонной плоскости под действием силы тяжести. При постановке задачи учитывается неодинаковое поведение материала при нагружении и разгрузке (реологическая модель содержит два предела текучести: статический τ_{cm} и динамический τ_{∂}). Основной математической трудностью при решении задачи является наличие неизвестной, изменяющейся во времени границы области вязкопластичного течения.

Ниже предлагается метод решения задачи, являющийся несколько измененным методом "мгновенных собственных функций", разработанным В.Г. Меламедом для решения задачи Стефана [1].

Пусть слой вязкопластичного материала толщины H находится на плоскости, угол наклона которой к горизонту изменяется, сначала возрастая, а затем убывая. При угле наклона $\alpha_0 = \arcsin \frac{\tau_{cm}}{g\rho H}$ начнется течение материала вдоль плоскости. При достаточно больших размерах плоскости, течение можно считать плоскопараллельным. Направив ось OX вдоль плоскости, а ось OY перпендикулярно потоку, сформулируем для единственной отличной от нуля компоненты скорости $V_x(y,t)$ краевую задачу в виде

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = g \sin \alpha(t) + \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}, \quad 0 < y < h(t), \ t > 0; \tag{1}$$

$$V_x(y,0) = 0, \quad h(0) = 0; \tag{2}$$

$$V_x(0,t) = 0 \ \text{ – условие прилипания;} \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)_{y=h(t)} = \begin{cases} \dfrac{\tau_{cm} - \tau_\partial}{\eta} & \text{при нагружении,} \\ 0 & \text{при разгрузке;} \end{cases} \tag{4}$$

$$V_x \Big|_{y=h(t)} = U(t) = \frac{1}{H - h(t)} \left[g \int_0^t \left[H - h(\xi)\right] \sin \alpha(\xi) d\xi - \frac{\tau_{cm} t}{\rho} \right]. \tag{5}$$

Здесь $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ – аналог кинематической вязкости, $h(t)$ – внешняя граница зоны вязкопластичного течения, остальные обозначения стандартны.

Вводя новые переменные по формулам

$$z = H \frac{y}{h(t)}, \qquad t_1 = t, \qquad V_x(y,t) = V(z,t_1), \tag{6}$$

получим краевую задачу в области с постоянными границами $(0 < z < H, \quad t > 0)$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{h^2(t)}{\nu H^2} \left[\frac{\partial V}{\partial t} - z \frac{h'(t)}{h(t)} \frac{\partial V}{\partial z} - g \sin \alpha(t) \right], \tag{7}$$

$$V(0,t) = 0, \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=H} = \frac{h(t)}{H} \frac{\tau_{cm} - \tau_\partial}{\eta}, \tag{9}$$

$$V(H,t) = U(t). \tag{10}$$

Решение строится следующим способом. Рассматривается функция $V(z,t)$ в виде ряда Фурье

$$V(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2H}, \tag{11}$$

где время t входит в коэффициенты ряда в качестве параметра. Ряд сходится равномерно внутри интервала вместе со своими производными, а при подходе к границам терпит разрыв. Поэтому граничные условия понимаются как предельные при подходе к границам изнутри области. Коэффициенты ряда находятся обычным способом

$$A_n(t) = \frac{2}{H} \int_0^H V(z,t) \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2H} dz. \qquad (12)$$

Интегрируя (12) два раза по частям и потребовав, чтобы функция $V(z,t)$ удовлетворяла уравнению и граничным условиям, получим для коэффициентов ряда бесконечную связанную систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$A_n'(t) + \frac{(2n-1)^2 \pi^2 \nu}{h^2(t)} A_n(t) + \frac{3}{2}\frac{h'(t)}{h(t)} A_n(t) = \frac{2\nu(-1)^{n-1}}{h(t)} \frac{\tau_{cm} - \tau_\partial}{\eta} +$$

$$+ \frac{4g \sin\alpha(t)}{\pi(2n-1)} + 2(-1)^{n-1} U(t) \frac{h'(t)}{h(t)} - \frac{h'(t)}{2h(t)} \sum_{m \neq n = 1}^{\infty} A_m(t) \frac{(-1)^{m+n-1}(2n-1)^2}{(m-n)(m+n-1)}, \qquad (13)$$

которую нужно решать при начальных условиях $A_n(0) = 0$.

Укорачивая систему (13), можно построить решение с любой степенью точности. Доказано, что при увеличении числа членов укороченной системы приближенное решение стремится к точному [1].

Если в некоторый момент $t = T_1$ угол наклона плоскости к горизонту начнет уменьшаться, то восстановления структуры материала сразу не произойдет. Будет иметь место некоторый переходный временной промежуток $T_1 < t < T_2$, когда размеры зоны течения не изменяются, а напряжение на границе "ядра" падает от τ_{cm} до τ_∂. На этом этапе решается обычная краевая задача в области $(0 < z < H)$.

Уравнение (7) упрощается

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{h_1^2}{\nu H^2}\left[\frac{\partial V}{\partial t} - g \sin\alpha(t)\right]. \qquad (14)$$

Изменятся условия (9) и (10)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=H} = \frac{h_1}{H} \frac{\tau(t) - \tau_\partial}{\eta}, \qquad (15)$$

$$U(t) = U(T_1) + g \int_{T_1}^{t} \sin\alpha(\xi) d\xi - \frac{1}{\rho(H - h_1)} \int_{T_1}^{t} \tau(\xi) d\xi. \qquad (16)$$

За начальное распределение скоростей берется то, которое сложилось к концу первого этапа. Граница области $h(t) = h(T_1) = h_1$ не будет изменяться до тех пор, пока напряжение на ней не упадет до значения τ_∂. Решение строится тем же методом, но для каждого коэффициента ряда Фурье получается независимое уравнение. Окончание этого этапа соответствует моменту $t = T_2$, когда напряжение на границе "ядра" достигло значения τ_∂.

Если угол наклона плоскости будет продолжать уменьшаться, то начнется восстановление структуры материала. Область течения начнет уменьшаться. Решение на этом этапе $(t > T_2)$ строится аналогично первому этапу, изменится лишь условие (9), вместо которого будет условие

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=H} = 0 \qquad (17)$$

и пределы интегрирования в условии (5).

Отметим, что аналогичная задача для обычной бингамовской жидкости решена другим методом в [2]. В этой работе допущены неточности при формулировке одного из граничных условий на неизвестной поверхности. В данной статье эта неточность исправлена.

В заключение отметим, что подобным методом решаются задачи в случаях, когда собственные числа можно задать в явном виде. При условиях третьего рода и в осесимметричных задачах этот метод не применим.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Меламед В.Г.* Сведение задачи Стефана к системе обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. АН СССР. Сер. Геофизика. 1958. № 7. С. 848 – 869.

2. *Сафрончик А.И.* Некоторые задачи неустановившегося течения вязкопластичной среды: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ростов н/Д, 1962. 109 с.

УДК 533.6.011:532.529

Г. Д. Севостьянов

РЕГУЛЯРНОЕ НЕСИММЕТРИЧНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОКОЛОЗВУКОВЫХ СКАЧКОВ

Построено околозвуковое поле течения за двумя криволинейными скачками (в результате пересечения косых скачков; причина их искривления – зона уплотнения или разрежения ниже по потоку).

Околозвуковое безвихревое течение идеального газа описывается уравнениями Фальковича-Кармана [1] ($u = M^2 - 1$, M – число Маха)

$$uu_x = v_y,\ v_x = u_y, \qquad (1)$$

на скачке $x = h(y)$ имеем два условия

$$h' = -\frac{[v]}{[u]},\ (h')^2 = \langle u \rangle, \qquad (2)$$