чается независимое уравнение. Окончание этого этапа соответствует моменту $t = T_2$, когда напряжение на границе "ядра" достигло значения τ_∂.

Если угол наклона плоскости будет продолжать уменьшаться, то начнется восстановление структуры материала. Область течения начнет уменьшаться. Решение на этом этапе $(t > T_2)$ строится аналогично первому этапу, изменится лишь условие (9), вместо которого будет условие

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=H} = 0 \tag{17}$$

и пределы интегрирования в условии (5).

Отметим, что аналогичная задача для обычной бингамовской жидкости решена другим методом в [2]. В этой работе допущены неточности при формулировке одного из граничных условий на неизвестной поверхности. В данной статье эта неточность исправлена.

В заключение отметим, что подобным методом решаются задачи в случаях, когда собственные числа можно задать в явном виде. При условиях третьего рода и в осесимметричных задачах этот метод не применим.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Меламед В.Г.* Сведение задачи Стефана к системе обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. АН СССР. Сер. Геофизика. 1958. № 7. С. 848 – 869.

2. *Сафрончик А.И.* Некоторые задачи неустановившегося течения вязкопластичной среды: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ростов н/Д, 1962. 109 с.

УДК 533.6.011:532.529

Г. Д. Севостьянов

РЕГУЛЯРНОЕ НЕСИММЕТРИЧНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОКОЛОЗВУКОВЫХ СКАЧКОВ

Построено околозвуковое поле течения за двумя криволинейными скачками (в результате пересечения косых скачков; причина их искривления – зона уплотнения или разрежения ниже по потоку).

Околозвуковое безвихревое течение идеального газа описывается уравнениями Фальковича-Кармана [1] ($u = M^2 - 1$, M – число Маха)

$$uu_x = v_y,\ v_x = u_y, \tag{1}$$

на скачке $x = h(y)$ имеем два условия

$$h' = -\frac{[v]}{[u]},\ (h')^2 = \langle u \rangle, \tag{2}$$

$[f]$, $< f >$ – разность и полусумма значений f_+ и f_- разрывной на скачке функции f.

Ударная поляра Буземана (1943) согласно (2) имеет уравнение

$$[v]^2 = [u]^2 < u > .$$

Пусть в однородном слабосверхзвуковом потоке ($u = u_\infty = M_\infty^2 - 1 > 0$, $v = v_\infty = 0$, $y \geq 0$), параллельном оси x, в точке $O(0, 0)$ пересекаются два косых скачка A_+O ($x = -\gamma_+ \cdot y$; $y \geq 0$) и A_-O ($x = \gamma_- \cdot y$; $y \leq 0$); $\gamma_+, \gamma_- > 0$ – постоянные. Эти скачки переходят в неизвестные кривые скачки OB_+ ($x = h_+(y) \geq 0$, $y \geq 0$) и OB_- ($x = h_-(y) \geq 0$, $y \leq 0$). Между A_+O и OB_+ имеется наклонный однородный поток ($u = u_{1+} > 0$, $v = v_{1+} < 0$), аналогично между A_-O и OB_-: $u = u_{1-} > 0$, $v = v_{1-} > 0$. Индекс "+" ("-") относится к области $y \geq 0$ ($y \leq 0$).

1. Нулевое приближение: $u(0, 0) = u_0$, $v(0, 0) = v_0$.

Строим три ежевидные поляры ("дикобразы" Буземана) [2] по значению потоков: $P(0, u_\infty)$, $P_+(v_{1+}, u_{1+})$, $P_-(v_{1-}, u_{1-})$; две последние скользят вершинами по P. Требование, чтобы из точки O выходила одна линия тока, приводит к тому, что в точке пересечения (v_0, u_0) на плоскости (v, u) правой стороны P_+ и левой стороны P_- наклоны "иголок" dv/du этих поляр одинаковы (условие совместимости двух потоков в точке O) [2]:

$$\begin{gathered}(u_\infty - u_{1+})\gamma_+ + (u_\infty - u_{1-})\gamma_- = (u_{1+} - u_0)\delta_+ + (u_{1-} - u_0)\delta_-, \\ \delta_+ \frac{3u_0 + \delta_+^2}{u_0 + 3\delta_+^2} + \delta_- \frac{3u_0 + \delta_-^2}{u_0 + 3\delta_-^2} = 0, \\ u_\infty + u_{1\pm} = 2\gamma_\pm^2, \ u_{1\pm} + u_0 = 2\delta_\pm^2.\end{gathered} \tag{3}$$

Точка (v_0, u_0) вычерчивает внутри поляры P *дозвуковое ежевидное ядро*, "дикобразик" (при $v_0 = 0$ его верх – точка Крокко Q [2]: $u_0 \approx -0{,}0866u_\infty$; низ – точка S: $u_0 \approx -0{,}3693u_\infty$). Проведя через (v_0, u_0) на (v, u) поляры P_+ и P_-, найдём величины (v_{1+}, u_{1+}) и (v_{1-}, u_{1-}), т. е. нулевое приближение $u \equiv u_0$, $v \equiv v_0$ с косыми скачками OB_{+0} и OB_{-0} ($x = \delta_\pm |y|$; $\delta_\pm > 0$).

2. Следующие приближения.

Возмущения ниже точки O (наличие тела или разряжения потока) искривляет скачки OB_+ и OB_-.

Решение (1) за ними ищем с помощью двух произвольных функций A_0 и B_0:

$$u = A_0(x) + B_0'(x)y + \frac{1}{2}\left(A_0A_0'\right)'y^2 + \frac{1}{6}\left(A_0B_0'\right)''y^3 + \ldots,$$

$$v = B_0(x) + A_0 A_0' y + \frac{1}{2}\left(A_0 B_0'\right)' y^2 + \ldots, \qquad (4)$$

$$A_0(x) = u_0 + d_0 x + d_1 x^2 + d_2 x^3 + \ldots,$$

$$B_0(x) = v_0 + e_0 x + e_1 x^2 + e_2 x^3 + \ldots$$

Тогда для второго приближения по малым x, y имеем

$$u = u_0 + d_0 x + e_0 y + d_1 x^2 + \left(u_0 d_1 + \frac{1}{2} d_0\right) y^2 + 2 e_1 y x + \ldots$$

$$v = v_0(u_0) + u_0 d_0 y + e_0 x + \left(u_0 e_1 + \frac{1}{2} d_0 e_0\right) y^2 + \left(2 u_0 d_1 + d_0^2\right) y x + e_1 x^2 + \ldots \qquad (5)$$

Уравнение скачка B_+OB_- ищем в виде ряда

$$x = h_\pm(y) = \delta_\pm |y| + \frac{1}{2} c_{0\pm} y^2 + \frac{1}{3} c_{1\pm} |y|^3 + \ldots$$

$$G_\pm(y) = \left|h_\pm'\right| - \delta_\pm, \ \ G_\pm(0) = 0. \qquad (6)$$

Записав условия (2) на B_+OB_- с помощью (6), имеем

$$u = u_{\text{ск}} = u_0 + 4\delta_\pm c_{0\pm} |y| + \left(4\delta_\pm c_{1\pm} + 2 c_{0\pm}^2\right) y^2 + \ldots$$

$$v = v_{\text{ск}} = v_0 - 2(u_0 + \delta_\pm^2) c_{0\pm} y - [2(u_0 + \delta_\pm^2) c_{1\pm} \operatorname{sign} y + 6\delta_\pm c_{0\pm}^2] y^2 + \ldots \qquad (7)$$

Приравняв u, v в (7) значениям из (5) на скачке (6), выразим все коэффициенты в (5) и (6) через $d_0 = g_0 = u_x(0, 0)$ – градиент скорости в точке O, учитывая второе равенство в (3)

$$e_0 = -\frac{3u_0 + \delta_\pm^2}{u_0 + 3\delta_\pm^2} \delta_\pm d_0 \operatorname{sign} y, \ldots; \ \ c_{0\pm} = \frac{1}{4}\left(d_0 + \frac{e_0}{\delta_\pm} \operatorname{sign} y\right), \ldots \qquad (8)$$

Симметричное пересечение скачков (регулярное отражение скачка от стенки x: ($\gamma_+ = \gamma_- = \gamma$, $\delta_+ = \delta_- = \delta$, $u_{1+} = u_{1-} = u_1 = -7u_0$) рассмотрено в [3] и в нашей статье этого сборника:

$$e_0 = e_1 = e_2 = \ldots = 0, \ \ c_{0\pm} = c_0 = \frac{d_0}{4}, \ \ c_1 = -\frac{15}{64} \frac{\delta d_0^2}{u_0} > 0, \ldots$$

$$d_1 = -\frac{37}{32} \frac{d_0^2}{u_0} > 0, \ldots$$

Коэффициент давления выражается через функцию u из (5):

$$c_p = -2 \frac{u - u_\infty}{(k+1) M_\infty^2},$$

$k > 1$ – отношение теплоёмкостей.

В теории "коротких" волн для аналогичной особенности не учитывается условие (3) соединения потоков в точке O, что приводит к появлению фиктивного "жидкого клина", вызванного встречной фиктивной струйкой газа.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Севостьянов Г.Д.* Основы теории околозвуковых течений газа. Ч. 1. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1987.

2. *Guderley K.G.* Theorie schallnaher strömungen. Berlin, Göttingen, Heidelbegr: Springer-Verlag. 1957 / Пер. с нем. К. Г. Гудерлей. Теория околозвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

3. *Севостьянов Г.Д.* Регулярное отражение околозвукового скачка от стенки // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 181 – 184.

УДК 539.3

Н. М. Сироткина, Н. С. Сироткина

РАСЧЁТ ВНУТРЕННИХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОКРЫТИЯХ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ИЗГИБА ДВУХСЛОЙНОЙ БАЛКИ

В покрытиях после их нанесения, как правило, возникают внутренние напряжения. Величина этих напряжений является весьма важной характеристикой покрытия, поскольку она определяет сцепляемость покрытия с подслоем, коррозионную стойкость, износостойкость и другие важные с точки зрения практики свойства. Для определения напряжений в покрытиях большинство исследователей используют следующий экспериментальный метод: покрытие (плёнка) наносится на тонкую пластинку (подложку), в результате чего последняя изгибается. Далее замеряется радиус кривизны R изогнутой пластинки и рассчитывается величина напряжений по формуле Стони [1]

$$\sigma_R = \frac{E_s h_s^2}{6Rh_f}, \tag{1}$$

где h_f – толщина пленки, h_s – толщина подложки, E_s – модуль Юнга материала подложки.

Заметим, что формула (1) применима только в том случае, когда толщина плёнки значительно меньше толщины подложки. Она выведена в предположении, что внутреннее напряжение, возникающее в проводимом эксперименте, определяется только свойствами покрытия, в то время как на самом деле оно зависит от условий работы покрытия, в данном случае