В теории "коротких" волн для аналогичной особенности не учитывается условие (3) соединения потоков в точке O, что приводит к появлению фиктивного "жидкого клина", вызванного встречной фиктивной струйкой газа.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Севостьянов Г.Д.* Основы теории околозвуковых течений газа. Ч. 1. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1987.

2. *Guderley K.G.* Theorie schallnaher strömungen. Berlin, Göttingen, Heidelbegr: Springer-Verlag. 1957 / Пер. с нем. К. Г. Гудерлей. Теория околозвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

3. *Севостьянов Г.Д.* Регулярное отражение околозвукового скачка от стенки // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 181 – 184.

УДК 539.3

Н. М. Сироткина, Н. С. Сироткина

РАСЧЁТ ВНУТРЕННИХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОКРЫТИЯХ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ИЗГИБА ДВУХСЛОЙНОЙ БАЛКИ

В покрытиях после их нанесения, как правило, возникают внутренние напряжения. Величина этих напряжений является весьма важной характеристикой покрытия, поскольку она определяет сцепляемость покрытия с подслоем, коррозионную стойкость, износостойкость и другие важные с точки зрения практики свойства. Для определения напряжений в покрытиях большинство исследователей используют следующий экспериментальный метод: покрытие (плёнка) наносится на тонкую пластинку (подложку), в результате чего последняя изгибается. Далее замеряется радиус кривизны R изогнутой пластинки и рассчитывается величина напряжений по формуле Стони [1]

$$\sigma_R = \frac{E_s h_s^2}{6Rh_f}, \tag{1}$$

где h_f – толщина пленки, h_s – толщина подложки, E_s – модуль Юнга материала подложки.

Заметим, что формула (1) применима только в том случае, когда толщина плёнки значительно меньше толщины подложки. Она выведена в предположении, что внутреннее напряжение, возникающее в проводимом эксперименте, определяется только свойствами покрытия, в то время как на самом деле оно зависит от условий работы покрытия, в данном случае от материала и толщины подложки. В настоящей статье предложен подход, свободный от этого недостатка.

Рассмотрим консольную пластинку длины a и ширины $2b$, состоящую их двух различных изотропных слоев. Введем систему координат (x, y, z) таким образом, чтобы область, занимаемая пластинкой, определялась неравенствами $0 \le x \le a$, $-b \le y \le b$, $-h_2 \le z \le h_1$, где h_1, h_2 – толщины слоев, $z = 0$ соответствует поверхности контакта. Будем отмечать все величины, относящиеся к верхнему слою ($z > 0$), индексом "1", а к нижнему слою ($z < 0$) – индексом "2". В частности, E_k ($k = 1,2$) – модули Юнга верхнего и нижнего слоя соответственно.

В ходе эксперимента покрытие (верхний слой) получает некоторое объёмное расширение (будем называть его *собственным* объёмным расширением). Подложка (нижний слой) препятствует свободной деформации покрытия, в результате чего пластинка изгибается. Таким образом, для описания проводимого эксперимента требуется изучить изгибную деформацию описанной выше двухслойной пластинки, вызванную различным собственным объёмным расширением верхнего и нижнего слоев. Эта задача является обобщением задачи о температурном изгибе биметаллической пластинки [2].

Будем полагать, что собственные объёмные расширения слоев зависят только от переменной z, и обозначим их $\theta_k(z)$. Примем, что $b/a << 1$, $h_1/a << 1$, $h_2/a << 1$, тогда пластинку можно рассматривать как балку, испытывающую изгиб в плоскости (x, z). Примем также, что выполняются гипотезы теории изгиба балок [3]. Тогда из всех характеристик НДС отличными от нуля будут только напряжения $\sigma_x^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(k)}$ и перемещения $u^{(k)}$, $w^{(k)}$, для которых имеют место следующие соотношения:

$$w^{(1)} = w^{(2)} = w(x), \quad u^{(1)} = u^{(2)} = u(x) - z\frac{dw}{dx}, \qquad (2)$$

$$\sigma_x^{(k)} = E_k\left(\frac{du}{dx} - z\frac{d^2w}{dx^2}\right) - E_k\theta_k(z), \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma_x^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k)}}{\partial z} = 0, \ \frac{\partial \sigma_{xz}^{(k)}}{\partial x} = 0, \ \sigma_{xz}^{(1)}\Big|_{z=0} = \sigma_{xz}^{(2)}\Big|_{z=0}, \ \sigma_{xz}^{(1)}\Big|_{z=h_1} = \sigma_{xz}^{(2)}\Big|_{z=-h_2} = 0. \qquad (4)$$

Перейдем от напряжений к интегральным характеристикам

$$N_x = \int_0^{h_1}\sigma_x^{(1)}dz + \int_{-h_2}^{0}\sigma_x^{(2)}dz, \ M_x = \int_0^{h_1}\sigma_x^{(1)}zdz + \int_{-h_2}^{0}\sigma_x^{(2)}zdz, \ Q_x = \int_0^{h_1}\sigma_{xz}^{(1)}dz + \int_{-h_2}^{0}\sigma_{xz}^{(2)}dz, \qquad (5)$$

где N_x – нормальное усилие, M_x – изгибающий момент, Q_x – перерезывающая сила. Из уравнений (4) следует

$$\frac{dN_x}{dx}=0, \quad \frac{dM_x}{dx}=Q_x, \quad \frac{dQ_x}{dx}=0. \tag{6}$$

Подставляя (3) в (5), получим соотношения, связывающие нормальное усилие и изгибающий момент с перемещениями

$$N_x = B\frac{du}{dx} - C\frac{d^2w}{dx^2} - n_\theta, \quad M_x = C\frac{du}{dx} - D\frac{d^2w}{dx^2} - m_\theta, \tag{7}$$

где

$$B = E_1h_1 + E_2h_2, \quad C = \frac{1}{2}\left(E_1h_1^2 - E_2h_2^2\right), \quad D = \frac{1}{3}\left(E_1h_1^3 + E_2h_2^3\right), \tag{8}$$

$$n_\theta = E_1\int_0^{h_1}\theta_1 dz + E_2\int_{-h_2}^{0}\theta_2 dz, \quad m_\theta = E_1\int_0^{h_1}\theta_1 z dz + E_2\int_{-h_2}^{0}\theta_2 z dz. \tag{9}$$

Запишем граничные условия на концах балки

$$x=0: \ u=w=\frac{dw}{dx}=0, \quad x=a: \ N_x=M_x=Q_x=0. \tag{10}$$

Из уравнений (6) и граничных условий (10) следует $N_x \equiv M_x \equiv Q_x \equiv 0$. Полагая в (7) левые части равными нулю, получим систему для определения перемещений, решая которую, находим с учётом граничных условий (10)

$$u = \frac{m_\theta C - n_\theta D}{C^2 - BD}x, \quad w = \frac{1}{2}\frac{m_\theta B - n_\theta C}{C^2 - BD}x^2. \tag{11}$$

Из (11) можно приближённо определить радиус кривизны

$$\frac{1}{R} \approx \frac{m_\theta B - n_\theta C}{C^2 - BD}. \tag{12}$$

Пусть собственное объёмное расширение покрытия не зависит от переменной z ($\theta_1(z) = \theta_0$), собственное объёмное расширение подложки отсутствует ($\theta_2(z) = 0$). Следуя традиции, будем искать не величину θ_0, а величину

$$\sigma_0 = -E_1\theta_0, \tag{13}$$

которая представляет собой напряжение, возникающее в покрытии, если его деформация полностью стеснена. Очевидно, что эта величина зависит только от материала покрытия.

Из формулы (12) с учётом (9) и (13) выражаем

$$\sigma_0 = \frac{1}{R}\frac{C^2 - BD}{h_1C - 0.5h_1^2B}. \tag{14}$$

Если $h_1 << h_2$, то формулу (14) можно упростить. В результате получим формулу, совпадающую с формулой Стони (1). Это объясняется тем, что при малой толщине покрытия напряжение, возникающее в нём в проводимом эксперименте, мало отличается от σ_0. Формула (14) позволяет определить пределы применимости формулы Стони. Анализ показал, что с ростом толщины покрытия погрешность формулы (1) быстро растет, при $E_1 << E_2$ её можно оценить величиной $h_1/h_2 \cdot 100\%$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Stoney G.* Proc. R. Soc. Ser. A. London, 1909. Vol. 32. P. 172.
2. *Григолюк Э.И.* Тонкие биметаллические пластинки и оболочки // Инж. сб. 1953. Т. XVII. С. 69 – 120.
3. *Дарков А.В., Шпиро Г.С.* Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 1969.

УДК 533. 6. 011: 532. 529

Г. П. Шиндяпин, Е. Н. Гамаюнова

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕГО СЛУЧАЯ НЕРЕГУЛЯРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ОТРАЖЕНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН*

1. Интерес к задачам нерегулярного взаимодействия и отражения относительно слабых (интенсивности $\mathrm{P}_{10} = (p_1 - p_0)/\mathrm{B}_0$, $\mathrm{P}_{20} = (p_2 - p_0)/\mathrm{B}_0$, $\mathrm{B}_0 = \rho_0^2 c_0^2$) ударных волн (УВ) (с углом наклона α к вертикали) в газе и газожидкостной среде, характеризуемой параметром $R_0(\gamma)$, обусловлен [1 – 6] запросами практики, связанными с решением проблем авиакосмической, нефтегазодобывающей промышленности и др., а также проблемой получения фундаментальных знаний (построения физически адекватной теории).

Установленные экспериментально [4, 5] режимы взаимодействия и отражения – развитого маховского (простого маховского – *SM*, с невырожденными отражёнными волнами), вырожденного маховского (Неймановского – *NM*, с вырождением одной из отражённых волн), регулярного (*R*) –

* Работа выполнена при поддержке Министерства образования РФ по программе «Научные исследования высшей школы по приоритетным направлениям науки и техники», проект 205.01.01.030, и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00524.