УДК 519.4

Е.В. Хворостухина

О КОНКРЕТНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ГИПЕРГРАФИЧЕСКИХ АВТОМАТОВ

Теория автоматов представляет собой один из основных разделов математической кибернетики, в котором изучаются устройства преобразования информации. В зависимости от специфики рассматриваемых задач устройство преобразования информации может моделироваться автоматом, у которого множество состояний наделено дополнительной математической структурой, сохраняющейся функциями переходов автомата. Так, известные конкретные задачи математической кибернетики приводят к понятиям упорядоченных, линейных, вероятностных, гиперграфических и других автоматов. Исследованиям таких автоматов посвящены, работы Б.И. Плоткина, Р.Г. Бухараева, Л.М. Глускина, Д.В. Сперанского, А.А. Сытника, В.Б. Лендера, А.В. Молчанова и многих других (см., например, [1-3]).

В настоящей статье продолжается изучение гиперграфических автоматов, т.е. автоматов, у которых множество состояний наделено дополнительной алгебраической структурой гиперграфа. Это достаточно широкий и весьма важный класс автоматов, так как многообразие таких алгебраических систем охватывает, в частности, автоматы, у которых множество состояний наделено дополнительной алгебраической структурой проективной или аффинной плоскости.

Согласно [4] гиперграфом называется алгебраическая система вида $H = (X, L)$, где X – непустое множество вершин гиперграфа и L – семейство произвольных подмножеств X, называемых ребрами гиперграфа. Вершины гиперграфа, содержащиеся в некотором его ребре, называются смежными. Гипергаф $H = (X, L)$ называется эффективным, если любая его вершина содержится в некотором его ребре. Пусть p – произвольное натуральное число. Гиперграф H будем называть гиперграфом с p-определимыми ребрами, если в каждом его ребре найдется по крайней мере $p+1$ вершина и, с другой стороны, любые p его вершин содержатся не более, чем в одном ребре.

Эндоморфизмом гиперграфа $H = (X, L)$ называется преобразование φ множества вершин X, которое смежные в гиперграфе вершины переводит в смежные вершины этого гиперграфа. Множество всех эндоморфизмов гиперграфа H с операцией композиции образует полугруппу $\mathrm{End}H$.

В статье под автоматом понимается полугрупповой автомат без выходных сигналов (см. [1]) $A = (X, S, \delta)$ с множеством состояний X, полугруппой входных сигналов S и функцией переходов $\delta : X \times S \longrightarrow X$. Для каждого $s \in S$ отображение δ определяет соответствующую этому входному сигналу

s функцию переходов $\delta_s : X \longrightarrow X$ по формуле: $\delta_s(x) = \delta(x, s) \quad (x \in X)$. Автомат $A = (X, S, \delta)$ будем называть гиперграфическим, если множество его состояний X наделено такой структурой гиперграфа $H = (X, L)$, что при любом входном сигнале $s \in S$ функция переходов δ_s является эндоморфизмом гиперграфа H.

Пусть $H = (X, L)$ — произвольный гиперграф и $\mathrm{End}H$ — полугруппа всех эндоморфизмов H. Определим отображение $\delta : X \times \mathrm{End}H \longrightarrow X$, полагая $\delta(x, \varphi) = \varphi(x)$, где $x \in X$ и $\varphi \in \mathrm{End}H$. Очевидно, что система $\mathrm{Atm}(H) = (H, \mathrm{End}H, \delta)$ является гиперграфическим автоматом. Такой автомат $\mathrm{Atm}(H)$ называется универсальным гиперграфическим автоматом над гиперграфом H, так как он обладает следующим универсальным свойством: для всякого гиперграфического автомата $A = (H, S, \delta)$ существует, и притом единственный, гомоморфизм по входным сигналам этого автомата в автомат $\mathrm{Atm}(H)$.

В статье исследована задача конкретной характеризации универсальных гиперграфических автоматов, которая формулируется следующим образом: при каких условиях на множестве состояний автомата $A = (X, S, \delta)$ можно так определить структуру гиперграфа $H = (X, L)$, что будет выполняться равенство $A = \mathrm{Atm}(H)$, т.е. полугруппа входных сигналов автомата A будет равна полугруппе эндоморфизмов $\mathrm{End}H$?

Пусть X – произвольное непустое множество, p – натуральное число и S – произвольная полугруппа преобразований множества X. Тогда S определяет на X следующие канонические $(p+1)$-арные отношения:

$$\delta_p = \cup\{\varphi^{p+1} : \varphi \in S\};$$

$$R_p = \{(x_1, ..., x_p, x_{p+1}) \in X^{p+1} : X^{p+1} \setminus \triangle_X(p+1) \subset \delta_p^{-1}(x_1, ..., x_p, x_{p+1})\},$$

где $\triangle_X(n) = \{(x_1, ..., x_n) \in X^n : x_i = x_j \text{ для некоторых } 1 \leq i \neq j \leq n\}$.

Полугруппу S условимся называть n-ограниченно замкнутой, если она удовлетворяет следующему условию: полугруппа S содержит все такие преобразования φ множества X, что для любого n-элементного подмножества $Y \subset X$ выполняется равенство $\varphi|Y = \psi|Y$ при некотором $\psi \in S$.

Теорема. *Автомат $A = (X, S, \delta)$ без равнодействующих входных сигналов в том и только том случае будет универсальным гиперграфическим автоматом $\mathrm{Atm}(H) = (H, \mathrm{End}H, \delta)$ для некоторого эффективного гиперграфа с p-определимыми ребрами $H = (X, L)$, если полугруппа входных сигналов S является $(p+1)$-ограниченно замкнутой полугруппой и ее каноническое отношение R_p удовлетворяет следующим условиям:*

(T_1) $(x, ..., x, x) \in R_p$ *для любого* $x \in X$;

(T_2) *для любых* $1 \le i_1, ..., i_p, i_{p+1} \le p+1$

$$(x_1, ..., x_p, x_{p+1}) \in R_p \Longrightarrow (x_{i_1}, ..., x_{i_p}, x_{i_{p+1}}) \in R_p;$$

(T_3) *для любых попарно различных элементов* $x_1, ..., x_p \in X$

$$(x, x_1, ..., x_p), (x_p, x_1, .., y) \in R_p \Longrightarrow (x, x_1, ..., x_{p-1}, y) \in R_p;$$

(T_4) *для любых* $x_1, ..., x_p \in X$, *удовлетворяющих условию* $(x_1, .., x_p, x_p) \in R_p$, *найдется такой отличный от всех них элемент* $x \in X$, *что* $(x_1, .., x_p, x) \in R_p$.

Полученный результат дает алгоритм решения задачи о том, какой конечный автомат является универсальным гиперграфическим автоматом для некоторого эффективного гиперграфа с p-определимыми ребрами. С другой стороны, этот результат позволяет изучать взаимосвязь абстрактных и элементарных свойств универсальных гиперграфических автоматов и их полугрупп входных сигналов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Плоткин Б.И., Гринглаз Л.Я., Гварамия А.А.* Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высш. шк., 1994.

2. *Лендер В.Б.* Об эндоморфизмах проективных геометрий // Исследования алгебраических систем: Мат. записки Урал. ун-та. Свердловск, 1984. С. 48-50.

3. *Молчанов А.В.* Об определяемости гиперграфических автоматов их выходными функциями // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов, 1998. Вып. 2. С. 74-84.

4. *Зыков А.А.* Гиперграфы // УМН. 1974. Т. 29, №6. С. 89-154.

УДК 519.642.8

А.А. Хромов

ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С ПОМОЩЬЮ СУММ ФЕЙЕРА

В данной статье результаты, полученные в [1] для простейшего интегрального уравнения первого рода, обобщаются на интегральное уравнение Вольтерра.

Рассмотрим уравнение

$$Au \equiv \int\limits_0^x A(x,t)u(t)dt = f(x), \tag{1}$$