УДК 519.4

С. А. Акимова

ОБ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТИ УПОРЯДОЧЕННЫХ АВТОМАТОВ ПОЛУГРУППАМИ ИХ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ *

В статье найдены необходимые и достаточные условия, при которых универсальные упорядоченные автоматы определяются своими полугруппами входных сигналов.

Под упорядоченным автоматом будем понимать, следуя [1], алгебраическую систему вида $A=(X,S,Y,\delta,\lambda)$, где X – упорядоченное множество состояний автомата, S – полугруппа входных сигналов, Y – упорядоченное множество выходных сигналов, $\delta: S\times X\to X$ – функция переходов и $\lambda: S\times X\to Y$ – выходная функция, удовлетворяющие условиям: $\delta(s_1s_2,x)=\delta(s_2,\delta(s_1,x))$ и для любого $s\in S$, $\delta(s,x)$ является эндоморфизмом X, $\lambda(s,x)$ – гомоморфизмом X в Y.

Для произвольных упорядоченных множеств X,Y алгебраическая система $Atm(X,Y)=(X,S,Y,\delta,\lambda)$ с полугруппой $S=EndX\times Hom(X,Y)$ и функциями $\delta((\varphi,\psi),x)=\varphi(x)$, $\lambda((\varphi,\psi),x)=\psi(x)$ является упорядоченным автоматом, который называется универсальным упорядоченным автоматом.

Автомат $Atm(X,Y)$ обладает определенным универсальным свойством [1], а именно для всякого полугруппового упорядоченного автомата $A=(X,S,Y)$ существует и притом единственный гомоморфизм по входным сигналам этого автомата в $Atm(X,Y)$.

Из работы Л.М. Глускина [2] следует, что полугруппы эндоморфизмов упорядоченных множеств X,Y изоморфны в том и только том случае, если упорядоченное множество X изоморфно упорядоченному множеству Y или двойственному для него упорядоченному множеству $\breve{Y}$. Это означает, что универсальные упорядоченные автоматы без выходных сигналов вполне определяются своими полугруппами входных сигналов.

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (проект 99-1224).

Мы распространяем этот результат на универсальные упорядоченные автоматы общего вида.

ТЕОРЕМА. Для универсальных упорядоченных автоматов $Atm(X,Y)$, $Atm(X_1,Y_1)$ следующие условия:

(1) полугруппы входных сигналов автоматов изоморфны;

(2) упорядоченные множества X,Y изоморфны соответственно упорядоченным множествам X_1,Y_1 или упорядоченным множествам $\overset{\cup}{X}_1,\overset{\cup}{Y}_1$

эквивалентны.

Для доказательства теоремы отметим следующие свойства.

ЛЕММА 1. Одноместный предикат теории полугрупп $\Phi(x)=(\forall y)(yx=x)$ определяет в полугруппе $S=EndX\times Hom(X,Y)$ множество всех ее элементов, являющихся парами постоянных преобразований множеств X,Y соответственно.

ЛЕММА 2. Одноместный предикат теории полугрупп $\Psi(x)=(\forall y)(xy=y)$ определяет в полугруппе $S=EndX\times Hom(X,Y)$ множество пар вида $(1_X,\psi)$, где 1_X – тождественное преобразование множества X и $\psi\in Hom(X,Y)$.

Обозначим Z множество правых нулей полугруппы S, U – множество левых единиц полугруппы S.

На множестве Z определим отношение эквивалентности ε:

$$x\equiv y(\varepsilon)\ \Leftrightarrow\ (\forall e\in U)(x\cdot e=y\cdot e).$$

ЛЕММА 3. Пусть пары (c_a,c_b), (c_{a_1},c_{b_1}) – правые нули полугруппы S. Пара (c_a,c_b) эквивалентна паре (c_{a_1},c_{b_1}) по отношению эквивалентности ε в том и только том случае, если $a=a_1$.

Пусть $Atm(X,Y)$, $Atm(X_1,Y_1)$ – универсальные упорядоченные автоматы, $S=EndX\times Hom(X,Y)$, $S_1=EndX_1\times Hom(X_1,Y_1)$ и π – изоморфизм полугруппы S на S_1.

Так как изоморфизм $\pi:S\cong S_1$ сохраняет все вышеуказанные формулы и конструкции, то π индуцирует биекции $f:X\to X_1$, и $g_a:Y\to Y_1$, ($a\in X$) по формулам:

$$f(a)=b\ \Leftrightarrow\ \pi(c_a,c_y)=(c_b,c_z)$$

для произвольных $y\in Y, z\in Y_1$,

$$g_a(y)=z\ \Leftrightarrow\ \pi(c_a,c_y)=(c_{f(a)},c_z).$$

ЛЕММА 4. Для любого преобразования $(\varphi,\psi)\in S$ выполняется

$$\pi(\varphi,\psi)=(f^2(\varphi),\psi^{\varphi}),$$

где $\psi^{\varphi}(f(a))=g_{\varphi(a)}(\psi(a))$ для любого $a\in X$.

ЛЕММА 5. Биективные отображения $f: X \to X_1$ и $g_a : Y \to Y_1$, ($a \in X$) являются изоморфизмами (или соответственно антиизоморфизмами) упорядоченных множеств X, X_1 на упорядоченные множества Y, Y_1 (или двойственные им упорядоченные множества $\breve{Y}, \breve{Y}_1$).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А.* Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высш. шк., 1994.

2. *Глускин Л. М.* Полугруппы изотонных преобразований // УМН. 1961. Т. 16, вып. 5. С. 157 – 162.

УДК 519.853.3

А. В. Белгородский

О МОДИФИКАЦИИ ОДНОФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ ДОХОДНОСТИ АКТИВОВ В УСЛОВИЯХ ИНТЕРНАЦИОНАЛЬНОЙ ДИВЕРСИФИКАЦИИ ВЛОЖЕНИЯ

1. Предположим, что инвестору разрешено вкладывать часть своего капитала в ценные бумаги компаний других стран. Тогда однофакторная модель доходности активов [1, с. 238] может быть модифицирована с учетом того, что для вычисления коэффициента “бета” каждого иностранного актива будет использоваться соответствующий рыночный индекс. Ковариационная матрица $\bar{V}$ в этом случае будет скорректирована очевидным образом ввиду присутствия корреляции между доходностью индексного портфеля внутреннего и иностранного рынков.

Пусть для актива *i*, эмитентом которого является местная компания, его доходность R_i связана с доходностью эталонного (индексного) портфеля R_m моделью простой линейной регрессии вида

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i ,$$

где $\{\alpha_i, \beta_i\}$ – параметры модели: α_i – свободный член, β_i – коэффициент регрессии. Относительно случайных отклонений $\{e_i\}$ доходностей активов от ожидаемых в соответствии с моделью значений выполняются традиционные предположения “рыночной модели” [1, с. 238].

Аналогично для доходностей ценных бумаг компании, относящейся к другой стране, имеем

$$R_j = \alpha_j + \beta_j R_f + e_j ,$$

здесь R_f – эффективность иностранного рыночного индекса (например, CAC, DAX, Dow-Jones, Nikkei и т.д.).