маемых решений, так как распределение капитала между активами компаний, относящихся к различным странам, уменьшает риск (дисперсию портфеля). Доходности по ценным бумагам, относящимся к одной стране, могут быть более коррелированны, поэтому риск вложения в целом можно существенно уменьшить путем выбора компаний из различных стран.

Более того, в случае если интернациональная диверсификация разрешена, инвестиции осуществляются в иностранной валюте, и волатильность обменного курса влияет на вариацию портфеля. Таким образом, дальнейшая модификация предложенного подхода, когда ставка обменного курса включена в рассмотрение, может существенно улучшить применимость модели.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Малюгин В. И.* Рынок ценных бумаг: количественные методы анализа. Минск, 2001.

2. *Edwin J., Elton P., Martin J., Gruber T.* Modern portfolio theory and investment analysis-6 ed. N.Y., 2003.

УДК 519.4

Д. А. Бредихин

О ДИОФАНТОВЫХ РЕДУКТАХ АЛГЕБР ОТНОШЕНИЯ ТАРСКОГО

Статья содержит обзор и новые результаты, касающиеся описания диофантовых редуктов алгебр отношений Тарского.

Множество бинарных отношений Φ, замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними, образует алгебру (Φ, Ω), называемую *алгеброй отношений*. Основы алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены в работах А. Тарского [1, 2]. Им были рассмотрены алгебры отношений вида $(\Phi, \circ, ^{-1}, \Delta, \cup, \cap, ^{-}, \varnothing, U)$, где $\circ$, $^{-1}$ – операции умножения и обращения отношений; $\cup$, $\cap$, $^{-}$ – булевы операции объединения, пересечения и дополнения; $\Delta, \varnothing, U$ – тождественное, пустое и универсальное отношения, рассматриваемые как нульарные операции. Алгебра отношений (Φ, Ω) называется редуктом алгебры отношений Тарского, если $\Omega \subset \{\circ, ^{-1}, \Delta, \cup, \cap, ^{-}, \varnothing, U\}$. Обзор некоторых результатов, посвященных редуктам алгебр отношений Тарского, можно найти в [3].

Операция над отношениями называется *диофантовой* [4], если она может быть задана с помощью формулы исчисления предикатов первого порядка с равенством, содержащей в своей записи лишь операцию конъюнкции и кванторы существования. К числу диофантовых операций алгебр отношения Тарского относятся операции $\circ,\ ^{-1},\ \Delta,\ \cap,\ U$. Мы сосредоточим свое внимание на редуктах с множеством операций Ω, удовлетворяющим условию $\{\circ\} \subset \Omega \subset \{\circ,\ ^{-1},\ \Delta,\ \cap, U\}$.

Обозначим через $R\{\Omega\}$ класс алгебр, изоморфных алгебрам отношения с операциями из Ω. Пусть $Q\{\Omega\}$ – квазимногообразие и $V\{\Omega\}$ – многообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$. Перечислим ряд проблем, обычно рассматриваемых при изучении алгебр отношений:

(1) *найти систему элементарных аксиом для класса* $R\{\Omega\}$;

(2) *выяснить, является ли класс* $R\{\Omega\}$ *конечно аксиоматизируемым*;

(3) *выяснить, является ли класс* $R\{\Omega\}$ *квазимногообразием*;

(4) *найти базис квазитождеств квазимногообразия* $Q\{\Omega\}$;

(5) *выяснить, является ли квазимногообразие* $Q\{\Omega\}$ *конечно базируемым*;

(6) *выяснить, является ли квазимногообразие* $Q\{\Omega\}$ *многообразием*;

(7) *найти базис тождеств многообразия* $V\{\Omega\}$;

(8) *выяснить, является ли многообразие* $V\{\Omega\}$ *конечно базируемым.*

В следующей таблице приводится сводка результатов, касающихся указанной проблематики [4 – 15], где символы $+$, $-$ означают соответственно позитивное и негативное решения проблемы, а символ ? означает тот факт, что проблема остается открытой.

Проблемы	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
$\{\circ\}$; $\{\circ, \Delta\}$; $\{\circ, \cap\}$	+	+	+	+	+	+	+	+
$\{\circ, \cap, \Delta\}$	?	–	+	?	–	?	?	?
$\{\circ,\ ^{-1}\}$; $\{\circ,\ ^{-1},\ \Delta\}$	+	–	+	+	–	–	+	+
$\{\circ,\ ^{-1}, \cap\}$; $\{\circ,\ ^{-1},\ \cap, \Delta\}$	+	–	+	+	–	–	+	–
$\{\circ, U\}$	+	?	–	+	?	–	+	+
$\{\circ, \Delta, U\}$	?	?	–	?	?	–	+	+
$\{\circ, \cap, U\}$	+	+	–	+	+	+	+	+
$\{\circ, \cap, \Delta, U\}$	?	?	–	?	?	?	?	?
$\{\circ,\ ^{-1}, U\}$; $\{\circ,\ ^{-1},\ \Delta, U\}$	?	–	–	?	–	–	+	–
$\{\circ,\ ^{-1}, \cap, U\}$; $\{\circ,\ ^{-1},\ \cap, \Delta, U\}$	?	–	–	+	–	–	+	–

Ниже приводятся новые результаты, дающие решение проблем (7) и (8) для классов $R\{\circ,\ ^{-1}, U\}$ и $R\{\circ,\ ^{-1},\ \Delta,\ U\}$.

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ – переменные. Для любых двух различных натуральных чисел $i, j \le n$ положим $[x_i, x_j] = x_i x_{i+1} ... x_j$, если $i < j$, и $[x_i, x_j] = x_i^{-1} x_{i-1}^{-1} ... x_j^{-1}$, если $i > j$. Чередующейся последовательностью назовем последовательность натуральных чисел $(i_1, i_2, ..., x_{2m-1})$, удовлетворяющую условиям $i_{2k} < x_{2k-1}$ и $i_{2k} < x_{2k+1}$ для $k = 1, ..., m-1$.

ТЕОРЕМА 1. Многообразие $V\{\circ, ^{-1}, U\}$ не является конечно базируемым. Алгебра $(A, \cdot, ^{-1}, u)$ типа $(2,1,0)$ принадлежит многообразию $V\{\circ, ^{-1}, U\}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам:

$$(xy)z = x(yz), \ (x^{-1})^{-1} = x, \ (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}, \quad u^2 = u, \quad u^{-1} = u,$$

и для каждой чередующейся последовательности $(i_1, i_2, ..., x_{2m-1})$ – тождеству $u[x_1, x_n] = u[x_1, x_{i_1}][x_{i_1}, x_{i_2}]...[x_{i_{2m-1}}, x_1][x_1, x_n]$, где $n = \max\{i_1, i_2, ..., x_{2m-1}\}$.

ТЕОРЕМА 2. Многообразие $V\{\circ, ^{-1}, \Delta, U\}$ не является конечно базируемым. Алгебра $(A, \cdot, ^{-1}, e, u)$ типа $(2,1,0,0)$ принадлежит многообразию $V\{\circ, ^{-1}, \Delta, U\}$ тогда и только тогда, когда алгебра $(A, \cdot, ^{-1}, u)$ принадлежит многообразию $V\{\circ, ^{-1}, U\}$ и выполняется тождество $xe = ex = x$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Tarski A.* On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. Vol. 6. P. 73 – 89.
2. *Tarski A.* Some methodological results concerning the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1953. Vol. 18. P. 188 – 189.
3. *Schein B. M.* Representation of reducts of Tarski relation algebras // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. 1991. Vol. 54. P. 379 – 394.
4. *Бредихин Д. А.* Абстрактная характеристика некоторых классов алгебр бинарных отношений // Алгебра и теория чисел. Нальчик, 1977. Вып. 2. С. 3 – 19.
5. *Bredikhin D. A., Schein B. M.* Representations of ordered semigroups and lattices by binary relations // Colloq. Math. 1978. Vol. 49. P. 2 – 12.
6. *Bredikhin D. A.* On relation algebras with general superpositions // Coll. Math. Soc. J. Bolyai. 1991. Vol. 54. P. 111 – 124.
7. *Бредихин Д. А.* Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями // Изв. вузов. Сер. Математика. 1993. № 3. С. 23 – 30.
8. *Andreka H., Bredikhin D. A.* The equational theory of union-free algebras of relations // Alg. Univers. 1994. Vol. 33. P. 516 – 532.
9. *Бредихин Д. А.* О квазитождествах алгебр отношений с диофантовами операциями // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38. С. 29 – 41.
10. *Бредихин Д. А.* Об алгебрах отношений с диофантовыви операциями // Докл. РАН, 1998. Т. 360. С. 594 – 595.
11. *Бредихин Д. А.* О редуктах алгебр отношений Тарского // Алгебра и логика. 1998. № 1. С. 3 – 16.
12. *Bredikhin D. A.* On classes of Omega-semigroups // Semigroups with Applications, Including Semigroup Rings / St.-Petersburg State University of Technology. St.-Petersburg, 1999. P. 59 – 62.
13. *Бредихин Д. А.* *U*-полугруппы отношения // Фундаментальная и прикладная математика. 2000. № 1. С. 51 – 56.
14. *Haiman M.* Arguesian lattices are not type I // Alg. Univers. 1991. Vol. 28. P. 191 – 199.
15. *Schein B. M.* Representation of involuted semigroups by binary relations // Fundamenta Math. 1974. Vol. 82. P. 121 – 141.